

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**SIMULAÇÃO DA VIBRAÇÃO INDUZIDA POR VÓRTICES EM
CILINDROS RÍGIDOS**

Caio César Batalha de Oliveira

SÃO PAULO
2014

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**SIMULAÇÃO DA VIBRAÇÃO INDUZIDA POR VÓRTICES EM
CILINDROS RÍGIDOS**

Trabalho de Formatura apresentado à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção do título de
Graduação em Engenharia

Caio César Batalha de Oliveira

Orientador:
Prof. Dr. Bruno Souza Carmo

Área de Concentração:
Engenharia Mecânica

SÃO PAULO
2014

Oliveira, Caio César Batalha de
Simulação da Vibração Induzida por Vórtices em Cilindros
Rígidos / C. C. B. Oliveira – São Paulo, 2014
55 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

1.Cilindro Rígido 2.VIV 3. Método de Elementos Espectrais
I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.
Departamento de Engenharia Mecânica II.t.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo realizar simulações numéricas através do Método de Elementos Espectrais para o caso de um cilindro rígido sujeito a um escoamento incompressível com um número de Reynolds relativamente baixo. Para que fosse possível fazer simulações próximas de um caso real, primeiramente foi realizado um teste de convergência de modo a obter uma malha que produzisse um resultado próximo do real a um custo computacional baixo. Em tal teste foi utilizado um cilindro rígido fixo. Após as simulações de convergência, foram realizadas as simulações para os casos de movimento com um e dois graus de liberdade de um cilindro rígido. Posteriormente, foram feitas simulações para um cilindro rígido em escoamentos com dois graus de liberdade considerando uma profundidade na direção deste. Os principais resultados obtidos foram as respostas da amplitude do movimento (nas direções x e y) e do arrasto exercido no cilindro em função da velocidade do escoamento.

ABSTRACT

This work has the purpose of performing numerical simulations through Spectral Element Method for the case of a stiff cylinder subject to an incompressible flow of low Reynolds number. In order to perform numerical simulations that are close to a real situation, a convergence test was conducted at a first moment to obtain a mesh that would be able to provide results close to reality at a low computational cost. A fixed stiff cylinder was used in such test. After that, 1 and 2 DOF movement of a stiff cylinder were performed. Simulations for a stiff cylinder in a 2 DOF movement with a depth in cylinder's axis direction were performed afterwards. The main obtained results were the amplitude of movement (in x and y directions) and the drag coefficient of the cylinder as function of velocity of the flow.

SUMÁRIO

1. Introdução	1
2. Motivação	2
3. Fundamentos teóricos	3
3.1 Escoamento ao redor de um cilindro	3
3.1.1 <i>Regiões de escoamento perturbado</i>	3
3.2 Fenômeno de separação e desprendimento de vórtices	4
3.2.1 <i>Escoamento completamente laminar</i>	5
3.2.2 <i>Transição na esteira</i>	6
3.2.3 <i>Transição nas camadas cisalhantes</i>	7
3.2.4 <i>Transição nas camadas limite</i>	7
3.2.5 <i>Escoamento completamente turbulento</i>	8
3.3 Vibrações Induzidas pelo Escoamento.....	8
3.3.1 <i>Vibrações Induzidas por Vórtices</i>	8
3.3.2 <i>Vibrações com um grau de liberdade</i>	9
3.3.3 <i>Parâmetros adimensionais relevantes</i>	11
3.3.4 <i>Fenômeno de sincronização (Lock-in)</i>	12
3.3.5 <i>Forças atuantes no cilindro</i>	14
3.3.6 <i>Vibrações com dois graus de liberdade</i>	15
3.3.7 <i>Vibração induzida por vórtices em cilindros flexíveis</i>	17
4. Método numérico para simulações com VIV	21
4.1 Desenvolvimento do método numérico.....	22
4.1.2 <i>Transformação das Equações de Navier-Stokes</i>	23
4.1.3 <i>Força e momento atuantes no cilindro</i>	26
4.1.4 <i>Equação de movimento do cilindro</i>	27
4.1.5 <i>Algoritmo de acoplamento</i>	28
4.1.6 <i>Discretização temporal das equações de Navier-Stokes</i>	28
4.1.6 <i>Discretização espacial das equações de Navier-Stokes através do Método de Elementos Espectrais</i>	30
4.2 Validação e simulação do escoamento	31
4.2.1 <i>Oscilação vertical forçada</i>	32
4.2.2 <i>Oscilação vertical livre</i>	33
4.2.3 <i>Oscilação longitudinal livre</i>	33
5. Simulações numéricas para os casos de 1 e 2 graus de liberdade	34
5.1 Teste de convergência	34

5.2 Simulações	36
5.3 Resultados	37
5.3.1 Movimento com um grau de liberdade (1 DOF)	37
5.3.2 Movimento com dois graus de liberdade (2 DOF).....	39
6. Simulações numéricas 3D	45
6.1 Teste de convergência	45
6.2 Simulações	46
6.3 Resultados	47
7. Conclusões	53
8. Referências Bibliográficas.....	54

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Regiões de escoamento perturbado. Extraído de ÁSSI (2005).	3
Figura 2 - Início da instabilidade da esteira em regime laminar. Adaptado de Batchelor (1967). Extraído de ÁSSI (2005).	6
Figura 3 - Transição na esteira. (a) $Re = 190$ (b) $Re = 340$. Extraído e adaptado de Zdravkovich (1997).....	7
Figura 4 - Extraído de DAHL (2008).....	9
Figura 5 - Sistema massa-mola-amortecedor em dois graus de liberdade (DAHL, 2008)	16
Figura 6 - Um cilindro flexível modelado como uma viga. Extraído de MUKUNDAN, 2008	17
Figura 7 - Sistema de referência absoluto e relativo (móvel)	23
Figura 8 - Malha definitiva	35
Figura 9 - Malha definitiva (cilindro)	36
Figura 10 – Campo de velocidades (u) com $V_r = 2,0$ – 1DOF.....	42
Figura 11 - Campo de velocidades (u) com $V_r = 5,0$ – 1DOF	43
Figura 12 - Campo de pressões com $V_r = 2,0$ – 1DOF	44
Figura 13 - Campo de pressões com $V_r = 5,0$ – 1DOF	44
Figura 14 - Campo de vorticidade (eixo z) com $V_r = 4,5$ – 3d – Vista frontal	49
Figura 15 - Campo de vorticidade (eixo z) com $V_r = 4,5$ – 3d – Vista superior	49
Figura 16 - Campo de vorticidade (eixo z) com $V_r = 2,0$ – 3d – Vista frontal	49
Figura 17 - Campo de vorticidade (eixo z) com $V_r = 2,0$ – 3d – Vista superior	50
Figura 18 - Campo de vorticidade (eixo z) com $V_r = 8,0$ – 3d – Vista frontal	50
Figura 19 - Campo de vorticidade (eixo z) com $V_r = 8,0$ – 3d – Vista superior	50

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Amplitude Vs Velocidade Reduzida (1 DOF)	38
Gráfico 2 – Coeficiente de arrasto Vs Velocidade Reduzida (1DOF)	38
Gráfico 3 - Frequência Vs Velocidade Reduzida (1DOF)	39
Gráfico 4 – Amplitude Longitudinal Vs Velocidade Reduzida (2DOF)	40
Gráfico 5 - Amplitude Transversal Vs Velocidade Reduzida (2DOF)	40
Gráfico 6 – Coeficiente de Arrasto Vs Velocidade Reduzida (2DOF).....	41
Gráfico 7 – Frequência Vs Velocidade Reduzida (2DOF)	41
Gráfico 8 – Amplitude Transversal Vs Velocidade Reduzida (3d)	47
Gráfico 9 – Coeficiente de Arrasto Vs Velocidade Reduzida (3d)	48
Gráfico 10 – Frequência Vs Velocidade Reduzida (3d).....	48
Gráfico 11 – Deslocamento (y) e Força de sustentação (Fy) Vs Tempo – Vr = 4,5 – 3d	51
Gráfico 12 – Deslocamento (y) e Força de sustentação (Fy) Vs Tempo – Vr = 4,5 – 3d (zoom)	51
Gráfico 13 – Deslocamento (y) Vs Deslocamento (x) – Vr = 4,5 – 3d	52

1. Introdução

O principal objetivo deste trabalho é obter resultados de simulações do escoamento ao redor de um cilindro rígido e avaliar a sua resposta em relação aos seguintes parâmetros: coeficiente de arrasto, frequência de emissão de vórtices e amplitude (transversal e longitudinal). Este relatório apresentará as abordagens para simulações em movimentos com um e dois graus de liberdade e um movimento de caráter tridimensional no qual se considera uma profundidade na direção z em um movimento com dois graus de liberdade.

2. Motivação

O problema relacionado a vibrações induzidas por vórtices tem se tornado um tema de grande relevância nos dias de hoje devido à crescente pesquisa na área de extração de petróleo em águas profundas. Para esta aplicação, são utilizadas longas estruturas cilíndricas com a função de extrair petróleo do leito marítimo. Tais estruturas são conhecidas como *risers* e seu projeto, construção, instalação e manutenção são muito caros. Por isso, o estudo completo dos efeitos que as vibrações induzidas pelo escoamento causam nos *risers* é de grande importância, tendo em vista todos os fatores econômicos envolvidos.

3. Fundamentos teóricos

3.1 Escoamento ao redor de um cilindro

Esta seção tem como objetivo explicar as características que são observadas em um escoamento ao redor de um cilindro. Serão, portanto, identificadas todas as diferentes regiões presentes nesse escoamento assim como serão descritos os seus respectivos comportamentos no escoamento.

3.1.1 Regiões de escoamento perturbado

As regiões de escoamento perturbado correspondem às regiões ao redor do corpo cilíndrico que são afetadas de alguma forma pela presença deste. Existem basicamente 4 tipos de regiões, conforme ilustra a figura 1:

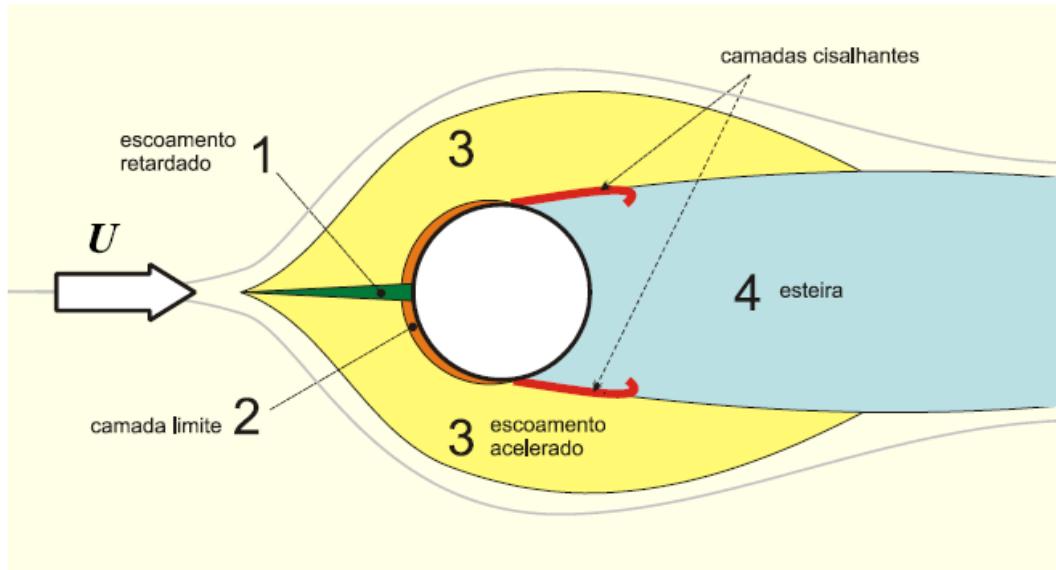


Figura 1 - Regiões de escoamento perturbado. Extraído de ÁSSI (2005).

- (1) uma região estreita de escoamento retardado;
- (2) duas camadas limite simétricas em relação ao eixo transversal do cilindro que está alinhado à direção do escoamento;

- (3) duas regiões laterais de fluido deslocado e acelerado;
- (4) uma região de esteira, a jusante no escoamento.

A região de escoamento retardado é uma consequência do ponto de estagnação localizado logo na frente do corpo cilíndrico.

As camadas limite presentes na região (2) estão submetidas a um gradiente de pressão favorável em sua parte frontal e à medida que se percorre essas camadas, o gradiente de pressão se torna adverso. Este último fenômeno faz com que a aderência dessas camadas ao cilindro seja prejudicada e provoque sua separação do corpo cilíndrico, formando camadas cisalhantes livres. As camadas cisalhantes delimitam a região de esteira próxima.

As regiões laterais (3) compreendem a parte de escoamento que é deslocada e acelerada pela presença do corpo. Como a esteira possui baixa pressão, ocorre o movimento do fluido da região (3) em direção a ela.

A região (4) corresponde à esteira e nela o escoamento está totalmente separado e com velocidade média menor que a incidente. Na região de esteira próxima (localizada próxima ao cilindro), ocorre a formação de bolhas de recirculação, que são convectadas ao longo da esteira. Além disso, é nesse local que ocorre os principais fenômenos que dão origem às vibrações induzidas pelo escoamento.

3.2 Fenômeno de separação e desprendimento de vórtices

O número de Reynolds tem importância fundamental em escoamentos externos em fluidos viscosos. Este número relaciona a magnitude das forças iniciais e viscosas presentes no escoamento, sendo definido pela seguinte relação:

$$Re = \frac{\rho U_\infty D}{\mu} \quad \text{Eq. 3.1}$$

onde

ρ : densidade do fluido

U_∞ : velocidade do escoamento incidente ao longe

D : diâmetro do cilindro

μ : viscosidade dinâmica do fluido

No caso do escoamento ao redor de um cilindro, observam-se sucessivas transições à medida que o número de Reynolds aumenta.

Quando Re é aproximadamente 200, ocorre uma transição para o regime turbulento na esteira, porém ainda sem afetar a camada limite e a região de esteira próxima. A turbulência de desenvolve aos poucos na região próxima ao cilindro, entretanto a camada limite e as camadas cisalhantes permanecem laminares.

A transição para regime turbulento alcança a camada limite no ponto de separação quando o número de Reynolds do escoamento atinge $Re \approx 10^5$, provocando uma diminuição repentina no arrasto. Se Re for aumentado ainda mais, a transição para o regime turbulento acaba se movendo para o ponto de estagnação frontal do cilindro, criando assim uma camada limite turbulenta completa na região de separação. A ocorrência de turbulência na camada limite eleva o valor das componentes cinéticas do escoamento, permitindo que a camada limite resista mais ao gradiente desfavorável de pressão. Isso faz com que a separação seja deslocada para uma região mais a jusante na parede do cilindro e, como consequência disso, a região que é exposta ao escoamento descolado (baixas pressões) será menor, provocando o estreitamento da esteira e a diminuição no arrasto.

O estado do escoamento pode ser completamente laminar, transição na esteira, transição nas camadas cisalhantes, transição nas camadas limite ou completamente turbulento.

3.2.1 Escoamento completamente laminar

No regime completamente laminar, pode ocorrer um escoamento altamente viscoso, que acontece quando o número de Reynolds é muito baixo, pois as forças inerciais não tem magnitude suficiente para vencer as forças viscosas. Nesse tipo de escoamento (conhecido como *creeping flow*), as camadas limite não se separam da superfície da parede cilíndrica em nenhum ponto. Entretanto, à medida que se eleva o número de Reynolds, verifica-se a ocorrência da separação do escoamento, quando bolhas de recirculação são formadas na região de esteira próxima. As camadas cisalhantes livres se encontram na extremidade jusante destas bolhas, no

local conhecido como ponto de confluência. Estas bolhas permanecem estáveis enquanto o escoamento está submetido a velocidades baixas.

A esteira começa a se tornar instável quando Re atinge a faixa entre 30 e 48, causando o alongamento das bolhas de recirculação. A partir de $Re = 65$, o comportamento instável é mais visível e percebe-se que as bolhas são convectadas para a esteira ao longe conforme uma oscilação harmônica. Ao final desse estado, pode-se observar a emissão alternada de uma carreira de vórtices laminares, conforme ilustra a figura 2. Esta esteira de vórtices é conhecida como *esteira de vórtices de von Kármán* e possui um papel fundamental quando se estuda o fenômeno de vibrações induzidas pelo escoamento em cilindros.

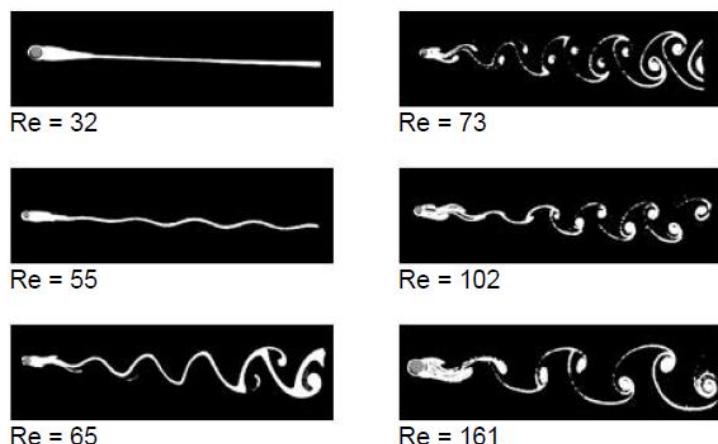


Figura 2 - Início da instabilidade da esteira em regime laminar. Adaptado de Batchelor (1967). Extraído de ÁSSI (2005).

3.2.2 Transição na esteira

À medida que Reynolds se aproxima de 180, a esteira começa a apresentar sinais de turbulência e deixa de ser bidimensional. Os fenômenos de transição serão detalhados ao longo do desenvolvimento deste trabalho. Na figura 3, são ilustradas imagens de esteiras transicionais.

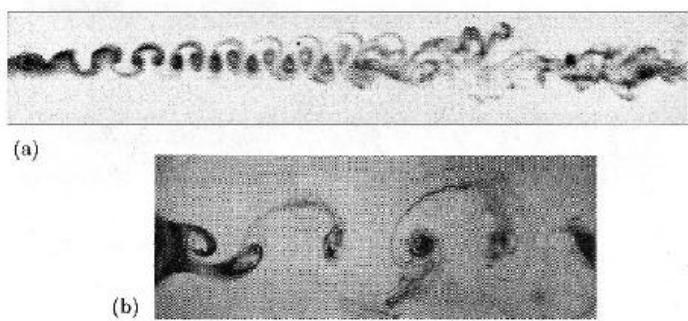


Figura 3 - Transição na esteira. (a) $Re = 190$ (b) $Re = 340$. Extraído e adaptado de Zdravkovich (1997).

3.2.3 Transição nas camadas cisalhantes

Esta segunda transição ocorre ao longo das camadas cisalhantes livres e neste momento as camadas limite ainda estão no regime laminar. Esta transição pode ser dividida em três fases:

- (i) desenvolvimento de ondas de transição ($350 - 400 < Re < 1 \times 10^3 - 2 \times 10^3$)
- (ii) formação de turbilhões de transição ($1 \times 10^3 - 2 \times 10^3 < Re < 2 \times 10^4 - 4 \times 10^4$)
- (iii) mudança rápida para a turbulência ($2 \times 10^4 - 4 \times 10^4 < Re < 1 \times 10^5 - 2 \times 10^5$)

3.2.4 Transição nas camadas limite

É nessa transição que ocorre a repentina redução no arrasto, conhecida como crise do arrasto. A transição na camada limite pode ser dividida em 5 etapas:

- (i) regime pré-crítico ($1 \times 10^5 - 2 \times 10^5 < Re < 3 \times 10^5 - 3,4 \times 10^5$)
- (ii) regime de uma bolha ($3 \times 10^5 - 3,4 \times 10^5 < Re < 3,8 \times 10^5 - 4 \times 10^5$)
- (iii) regime de duas bolhas ($3,8 \times 10^5 - 4 \times 10^5 < Re < 5 \times 10^5 - 1 \times 10^6$)
- (iv) regime supercrítico ($5 \times 10^5 - 1 \times 10^6 < Re < 3,5 \times 10^6 - 6 \times 10^6$)
- (v) regime pós-crítico ($3,5 \times 10^6 - 6 \times 10^6 < Re <$ não conhecido)

3.2.5 Escoamento completamente turbulento

O estado de escoamento completamente turbulento só é alcançado quando todas as regiões de escoamento perturbado se tornam turbulentas. Não se tem conhecimento sobre o a faixa de valor de Re de início deste tipo de regime e seu valor final teórico é quando Re tende ao infinito. Tal situação corresponde ao último estado de escoamento.

3.3 Vibrações Induzidas pelo Escoamento

As vibrações induzidas pelo escoamento (VIE) ocorrem na maioria dos casos em que estruturas de perfil rombudo estão submetidas a escoamentos fluidos. Em algumas situações, tais vibrações podem causar danos ou até destruir a estrutura, sendo que em outras, elas produzem movimentos oscilatórios úteis. Os diversos tipos de VIE são classificados de acordo com sua natureza. Neste trabalho serão discutidas apenas as vibrações induzidas por vórtices (VIV).

3.3.1 Vibrações Induzidas por Vórtices

Quando um cilindro é flexível ou está montado elasticamente, sua frequência natural pode ser excitada pelo desprendimento de vórtices. Assim, movimentos de alta amplitude podem ocorrer à medida que a frequência da geração de vórtices se aproxima da frequência natural do cilindro. Estes movimentos são as vibrações induzidas por vórtices (VIV) e são causadas pela interação da estrutura cilíndrica com os vórtices gerados na esteira. O desprendimento de vórtices em um cilindro oscilante é semelhante ao fenômeno em um cilindro estacionário, onde os vórtices de desprendem na frequência de Strouhal ou próximo a ela.

O termo VIV geralmente se refere a vibrações que são estáveis e auto-limitantes, resultando de desprendimento de vórtices em grande escala. A natureza auto-limitante das vibrações induzidas por vórtices é provocada por um equilíbrio entre as forças de excitação e o amortecimento viscoso.

As oscilações estruturais causadas por VIV normalmente possuem uma amplitude moderada. Deste modo, estas oscilações não são elevadas o suficiente para provocar uma fratura catastrófica inicialmente, porém, após um certo número de ciclos, o material pode falhar por fadiga. Portanto, a principal questão envolvendo estruturas que estão submetidas a VIV é a fadiga.

O fenômeno de vibrações induzida por vórtices está tipicamente associado a estruturas longas e relativamente finas as quais possuem um elevado número de frequências naturais. Tais estruturas podem ser encontradas, por exemplo, na conexão entre as plataformas de petróleo e o leito oceânico, sendo que estas conexões estão no formato cilíndrico. Porções destas estruturas cilíndricas longas ficam suspensas e, portanto, suscetíveis a vibrações causadas por correntes marítimas.

3.3.2 Vibrações com um grau de liberdade

No caso de VIV com um grau de liberdade, um cilindro circular elasticamente montado está situado em uma corrente livre de fluido, como é mostrado na figura 4.

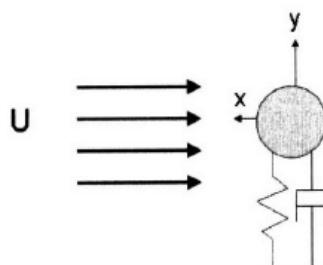


Figura 4 - Extraído de DAHL (2008)

O cilindro possui massa m e a montagem elástica possui rigidez k e amortecimento b . A força fluida incidente no cilindro na direção transversal é denominada L . Esta representação corresponde a um sistema massa-mola-amortecedor e sua equação de movimento é dada por:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = L(t) \quad \text{Eq. 3.2}$$

A frequência natural (ω_n) da estrutura no vácuo é fornecida pela seguinte equação:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{Eq. 3.3}$$

Uma boa aproximação para a força $L(t)$ e a resposta $y(t)$ do cilindro é fornecida pelas equações 3.4 e 3.5, onde L_0 é a magnitude da força fluida, y_0 é a amplitude de oscilação do corpo, ω é a frequência angular de oscilação do corpo e φ é o ângulo de fase entre a força de excitação fluida e o deslocamento do cilindro. Segundo Blevins (1990), os fenômenos de VIV podem ser modelados como oscilações harmônicas, sem prejuízos às características deste fenômeno.

$$L(t) = L_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{Eq. 3.4}$$

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t) \quad \text{Eq. 3.5}$$

Nos casos em que o cilindro oscila em uma corrente livre, este sofre uma aceleração através do fluido, provocando também a aceleração da porção de fluido que está ao redor de seu corpo. Esta aceleração do fluido envolto no corpo resulta em uma força que está em fase com a força inercial presente do membro esquerdo da equação 3.2. Tal força resultante é conhecida como força ideal da massa adicionada. O desprendimento de vórtices na região de esteira do cilindro pode também causar forças do fluido em fase com a força de inércia da estrutura, resultando em uma outra parcela de força do fluido que aparece como força inercial. Entretanto, tais forças não podem ser distinguidas individualmente através da medição de forças hidrodinâmicas. Por isso, a soma de todas as forças de fluido do membro direito que estão em fase com as de inércia do membro esquerdo da equação 3.2 é denominada força efetiva da massa adicionada.

3.3.3 Parâmetros adimensionais relevantes

A seguir, são apresentados importantes parâmetros adimensionais relacionados a vibrações induzidas por vórtices para sistemas de um grau de liberdade.

a) Amplitude reduzida (A^*)

É a relação entre a amplitude de oscilação do cilindro e seu diâmetro. A amplitude de oscilação é denotada por A ou y_0 .

$$A^* = \frac{y_0}{D} = \frac{A}{D}$$

b) Velocidade reduzida (V_r)

É dada pela relação entre a velocidade do escoamento incidente (U_∞), a frequência natural de oscilação do sistema no vácuo (f_{N0}) e o diâmetro do cilindro (D).

$$V_r = \frac{U_\infty}{f_{N0}D}$$

c) Parâmetro de massa (m^*)

É dado pela relação entre a massa (m) de todo o sistema que oscila e a massa do volume de fluido deslocado pelo cilindro (m_V). Na relação a seguir L_w é o comprimento submerso do cilindro.

$$m^* = \frac{m}{m_V} = \frac{m}{\frac{\pi D^2}{4} L_w \rho}$$

d) Frequência reduzida (f_0^*)

É a razão entre a frequência de oscilação do cilindro (f) e a frequência natural do sistema no vácuo (f_{N0}).

$$f_0^* = \frac{f}{f_{N0}}$$

e) Parâmetro de amortecimento (ζ)

Representa a relação entre o amortecimento estrutural (c) e o amortecimento crítico ($c_{cr} = 2\sqrt{km}$).

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

f) Coeficiente de massa adicional (C_m)

É dado pela relação entre a massa adicionada efetiva (m_a) e a massa do volume de fluido deslocado pelo cilindro.

$$C_m = \frac{m_a}{\frac{\pi D^2}{4} L_w \rho}$$

g) Coeficiente de arrasto (C_D)

Este parâmetro é fornecido pela relação entre a força de arrasto (F_x), a pressão de estagnação e a área projetada do cilindro.

$$C_D = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 D L_w}$$

h) Coeficiente de sustentação (C_L)

Este parâmetro é fornecido pela relação entre a força de sustentação (F_y), a pressão de estagnação e a área projetada do cilindro.

$$C_L = \frac{F_y}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 D L_w}$$

3.3.4 Fenômeno de sincronização (*Lock-in*)

O fenômeno de sincronização (*lock-in*, no inglês) é classicamente definido como o regime no qual a frequência de emissão de vórtices (f_s) é capturada pela frequência

f , sendo que a sincronização acontece no momento em que $f_s/f \approx 1$. Uma observação importante que deve ser citada é que f_s representa a frequência de emissão de vórtices para um cilindro oscilando.

Em cilindros montados elasticamente, existe a possibilidade de a esteira sincronizar com o movimento do cilindro. A instabilidade natural do escoamento ocorre na frequência de Strouhal. Uma vez que a estrutura se move, a frequência de emissão de vórtices pode ser capturada pela frequência de oscilação da estrutura, dentro de uma banda de frequência em torno da frequência de Strouhal. A banda de frequência cresce à medida que a amplitude do movimento aumenta. O fato de a esteira seguir a oscilação de frequência da estrutura resulta em alterações substanciais nas forças de massa adicional, podendo conduzir a frequência natural efetiva do sistema a valores diferentes da frequência natural nominal. Após isso, um equilíbrio dinâmico é atingido.

Quando a estrutura está sob o fenômeno de sincronização, a frequência de excitação da estrutura (ω_{ex}) é igual à sua frequência natural ajustada por um fator relacionado aos efeitos de massa adicional do fluido, como é mostrado na equação 3.6.

$$\omega_{ex} = \sqrt{\frac{k}{m+m_a}} \quad \text{Eq. 3.6}$$

Ao dividir ω_{ex} pela frequência natural e adimensionalizando a massa, tem-se a seguinte equação:

$$\omega_{ex} = \omega_n \sqrt{\frac{m^*}{m^*+C_m}} \quad \text{Eq. 3.7}$$

A equação 3.7 mostra que a condição de *lock-in* é bastante afetada pelo parâmetro de massa e pelo coeficiente de massa adicional. Em sistemas expostos ao ar, m^* é elevado enquanto C_m é relativamente pequeno. Nesses casos, a frequência de excitação possui quase o mesmo valor da frequência natural da estrutura. Entretanto, em estudos recentes sobre os efeitos do parâmetro de massa, Khalak; Williamson (1999) mostraram que, para parâmetros de massa baixos, a frequência

de excitação se afasta da frequência natural da estrutura. A diferença relativa entre o parâmetro de massa e o coeficiente de massa adicionada se revela importante em sistemas com parâmetro de massa baixo, pois, nesta situação, a massa adicionada provocaria uma alteração significativa na frequência de excitação da estrutura

3.3.5 Forças atuantes no cilindro

Estudos experimentais de um cilindro oscilando em um grau de liberdade mostram que a força L , variável no tempo, pode ser representada por uma função senoidal assim como o movimento $y(t)$ do cilindro. Sendo assim, a solução particular da eq. 3.2 deve ser uma função senoidal, fornecendo expressões para o movimento do cilindro (y) e para a força de sustentação (L). Logo, tem-se:

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t) \quad \text{Eq. 3.8}$$

$$L(t) = L_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{Eq. 3.9}$$

y_0 : Amplitude do movimento na direção y

L_0 : Amplitude da força de sustentação

φ : ângulo de diferença de fase entre o movimento na direção y e a força de sustentação

A eq. 3.9 pode ser expandida em termos de senos e cossenos, resultando na seguinte expressão:

$$L(t) = L_0 \sin(\varphi) \cos(\omega t) + L_0 \cos(\varphi) \sin(\omega t) \quad \text{Eq. 3.10}$$

Na forma adimensional, a amplitude da força de sustentação é dada em termos do coeficiente de sustentação, C_L . O coeficiente de sustentação pode ser composto por dois termos, sendo que um deles em fase com a velocidade e o outro em fase com a aceleração, como está definido nas equações a seguir:

$$C_{Lv} = C_L \sin(\varphi) \quad \text{Eq. 3.11}$$

$$C_{La} = C_L \cos(\varphi) \quad \text{Eq. 3.12}$$

$C_{L\nu}$: componente do coeficiente de sustentação em fase com a velocidade

C_{La} : componente do coeficiente de sustentação em fase com a aceleração

Substituindo as equações 3.8 e 3.9 na equação 3.2 e deixando esta em sua forma adimensional, tem-se as relações entre a amplitude do movimento e as forças fluidas atuantes no cilindro. Sarpkaya (1977), Bearman (1984) e Khalak;Williamson (1996) mostram esta derivação em detalhe, embora a forma desta solução possa ser apresentada em diversas maneiras. As soluções destas equações representadas em termos da amplitude adimensional e do coeficiente de massa adicionada são fornecidas por:

$$\frac{y_0}{D} = \frac{V_{rn}^2 C_{L\nu}}{4\pi^3 \frac{f}{f_n} m^* \zeta} \quad \text{Eq. 3.13}$$

$$C_m = \frac{-C_{La}}{\frac{1}{4}\pi\rho D^2 S y_0} \quad \text{Eq. 3.14}$$

O coeficiente de massa adicionada (C_m), que está relacionado com a força de sustentação em fase com a aceleração, é uma função da amplitude e da frequência. Além disso, a amplitude do movimento do cilindro está relacionada com a força de sustentação em fase com a aceleração e é afetada pela velocidade reduzida nominal (V_{rn}), a razão entre a frequência de excitação e a frequência natural (f/f_n), o parâmetro de massa (m^*) e o parâmetro de amortecimento (ζ).

3.3.6 Vibrações com dois graus de liberdade

No estudo na vibração de um cilindro em dois graus de liberdade, os movimentos do cilindro nas direções longitudinal (paralela) e transversal ao escoamento são senoidais. Além disso, o sistema é modelado como sendo massa-mola-amortecedor em dois graus de liberdade, como é visto na seguinte figura:

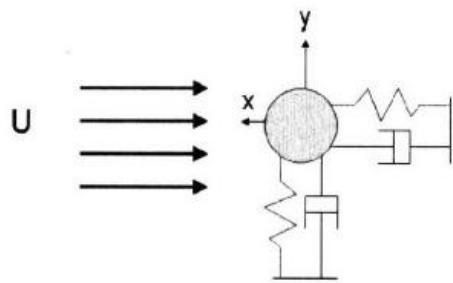


Figura 5 - Sistema massa-mola-amortecedor em dois graus de liberdade (DAHL, 2008)

As equações de movimento de um cilindro rígido para dois graus de liberdade são dadas por:

$$m_y \ddot{y} + b_y \dot{y} + k_y y = L \quad \text{Eq. 3.15}$$

$$m_x \ddot{x} + b_x \dot{x} + k_x x = D_f \quad \text{Eq. 3.16}$$

$$y = y_0 \sin(\omega t) \quad \text{Eq. 3.17}$$

$$x = x_0 \sin(2\omega t + \theta) \quad \text{Eq. 3.18}$$

Como é visto nas equações 3.17 e 3.18, os movimentos longitudinal e transversal são representados por senóides defasadas entre si por um ângulo θ . O acoplamento entre as equações diferenciais de movimento (eqs. 3.15 e 3.16) se dá pela relação entre a força de sustentação (L) e a força de arrasto (D_f). Os parâmetros de força para o movimento longitudinal são calculados da mesma maneira do movimento transversal, porém deve-se considerar a frequência como sendo o dobro à correspondente ao movimento transversal.

3.3.7 Vibração induzida por vórtices em cilindros flexíveis

Um *riser* (cilindro flexível) pode ser modelado como uma viga sob tensão devido a uma força fluida externa, conforme feito por Mukundan (2008). Desta maneira, define-se alguns parâmetros utilizados na sua modelagem:

l : comprimento do cilindro flexível

m : massa por unidade de comprimento

b : amortecimento estrutural

EI : rigidez flexional

Como os movimentos provocados por VIV possuem amplitudes da ordem do diâmetro do cilindro flexível, a dinâmica estrutural pode ser descrita utilizando-se de um modelo linear. A figura 6 a seguir mostra um cilindro flexível modelado como uma viga sob tensão, esticado ao longo da direção z .

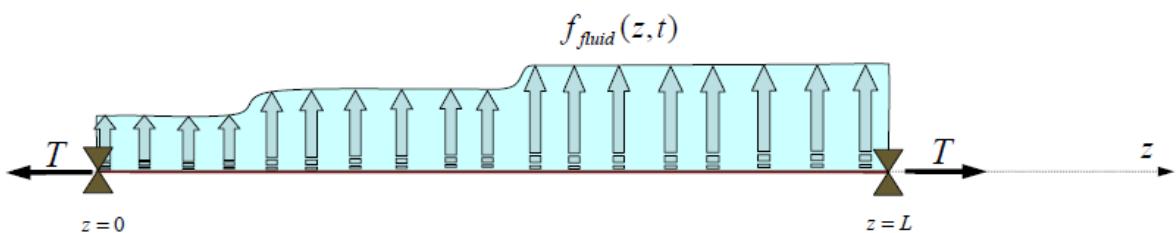


Figura 6 - Um cilindro flexível modelado como uma viga. Extraído de MUKUNDAN, 2008

A equação governante da oscilação transversal desta viga entre $z = 0$ e $z = l$, sob uma tensão T e uma força fluida $f(z, t)$ variante no tempo na direção y é dada pela seguinte expressão:

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(T \frac{\partial y}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right) = f(z, t) \quad \text{Eq. 3.19}$$

A força $f(z, t)$, variante no tempo, é uma função do movimento da estrutura e tem uma origem hidrodinâmica. Entretanto, a oscilação da estrutura é sincronizada com

as forças oriundas do VIV quando a reação é temporariamente estacionária. O movimento de resposta em regime permanente de um cilindro flexível pode ser escrito na seguinte forma:

$$y(z, t) = \operatorname{Re}\{Y(z)e^{i\omega t}\} \quad \text{Eq. 3.20}$$

A força fluida $f(z, t)$ pode ser escrita através de uma aproximação aonde assume-se que segmentos do cilindro flexível se comportam como cilindros rígidos. Usando esta aproximação, a parte harmônica da força fluida é escrita em duas partes, como é descrito a seguir:

$$f(z, t) = \operatorname{Re} \left\{ \left[C_m \left(\frac{|Y(z)|}{D}, V_r(z) \right) \left(\rho_f \frac{\pi D^2}{4} \right) (Y(z)\omega^2) + \left[iC_{L\nu} \left(\frac{|Y(z)|}{D}, V_r(z) \right) \left(\frac{\rho_f U^2}{2} D \right) \frac{Y(z)}{|Y(z)|} \right] e^{i\omega t} \right] \right\} \quad \text{Eq. 3.21}$$

onde,

$U(z)$: Velocidade do escoamento local (assumida como constante),

ρ_f : densidade do fluido.

De acordo com a equação anterior, uma parte da força está em fase com a velocidade e a outra parte, em fase com a aceleração (força de massa adicionada). O coeficiente de massa adicional C_m (obtido experimentalmente) e o coeficiente de sustentação em fase com a velocidade $C_{L\nu}$ podem ser usados na estimativa da força de excitação que o fluido exerce sobre o cilindro. Uma observação que deve ser feita é que, neste caso, estes coeficientes são função da amplitude reduzida local ($\frac{|Y(z)|}{D}$) e da velocidade reduzida local ($V_r(z)$), a qual é definida por:

$$V_r(z) = \frac{2\pi U(z)}{\omega D} \quad \text{Eq. 3.22}$$

Substituindo as equações 3.20 e 3.21 na equação 3.19, temos:

$$\left[(-\omega^2 m + ib\omega)Y - \frac{\partial}{\partial z} \left(T \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \right) \right] e^{i\omega t} = \left[C_m \left(\rho_f \frac{\pi D^2}{4} \right) (Y(z)\omega^2) + iC_{L\nu} \rho f U^2 D Y(z) Y(z) e^{i\omega t} \right]$$

Eq. 3.23

A equação 3.23 pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\left\{ -\omega^2 \left[m + C_m \left(\rho_f \frac{\pi D^2}{4} \right) + i\omega b \right] \right\} Y - \frac{\partial}{\partial z} \left(T \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \right) = iC_{L\nu} \left(\frac{\rho_f U^2}{2} D \right) \frac{Y}{|Y|}$$

Eq. 3.24

Com as condições de contorno adequadas, a equação 3.24 representa um problema de autovalor não-linear. A não-linearidade da equação é devido à presença dos termos $Y(z)/|Y(z)|$, C_m e $C_{L\nu}$, os quais dependem de Y e ω .

A resolução deste problema não-linear de autovalor é, entretanto, muito complexa, sendo necessário achar uma solução alternativa para o problema. Uma forma alternativa do problema não-linear de autovalor pode ser obtida multiplicando os dois lados da equação 3.24 pelo conjugado de $Y_n(z)$ e realizando uma integração por partes (considerando nulas as condições de contorno). A seguir, tem-se essa forma alternativa:

$$\begin{aligned} & \int_{z=0}^l \left(T \left| \frac{dY}{dz} \right|^2 + EI \left| \frac{d^2Y}{dz^2} \right|^2 + ib\omega |Y|^2 \right) dz \\ &= \int_{z=0}^l \left(\left[m + C_m \rho_f \frac{\pi D^2}{4} \right] |Y|^2 dz + iC_{L\nu} \left(\frac{\rho_f U^2}{2} D \right) |Y| \right) dz \end{aligned}$$

Eq. 3.25

As partes real e imaginária da equação 3.25 podem ser mostradas separadamente, como é descrito a seguir:

$$\int_{z=0}^l \left(T \left| \frac{dY}{dz} \right|^2 + EI \left| \frac{d^2Y}{dz^2} \right|^2 \right) dz = \omega^2 \int_{z=0}^l \left[m + C_m \rho_f \frac{\pi D^2}{4} \right] |Y|^2 dz$$

$$\int_{z=0}^l b\omega |Y|^2 dz = \int_{z=0}^l C_{Lv} \left(\frac{\rho_f U^2}{2} D \right) |Y| dz$$

Eq. 3.26

Em uma abordagem de conservação de energia, as equações 3.25 e 3.26 possuem um significado físico. A equação 3.25 pode ser vista como um balanço de energia cinética – potencial. A equação 3.26 pode ser vista como um balanço entre a potência fornecida pelo fluido ao cilindro flexível e a potência dissipada através do fluido e o amortecimento estrutural.

4. Método numérico para simulações com VIV

Para o caso de um corpo rígido montado em uma base elástica e submetido a forças provocadas pelo escoamento, pode-se aplicar as equações de Navier-Stokes em escoamentos incompressíveis com condições de contorno móveis, como é descrito a seguir:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{Eq. 4.1a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad \text{Eq. 4.1b}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_b(t) \text{ em } \Gamma(t) \quad \text{Eq. 4.1c}$$

Sendo que:

\mathbf{v} : velocidade do fluido

p : pressão reduzida

O termo $\Gamma(t)$ denota a região de interface entre o escoamento e o corpo e se move a uma velocidade desconhecida $\mathbf{v}_b(t)$.

A equação estrutural mostrada a seguir descreve o movimento do corpo:

$$\mathbf{L} \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2}, \frac{\partial \delta}{\partial t}, \delta \right) = f(\mathbf{v}, \mathbf{v}, p), \quad \text{Eq. 4.2}$$

onde considera-se que \mathbf{L} é um operador linear e δ é uma variável que descreve o movimento do corpo, podendo ser, por exemplo, o deslocamento vertical.

Ao invés de resolver diretamente o sistema acoplado composto pelas equações 4.1 e 4.2, uma maneira alternativa mais eficiente consiste em resolver as equações de Navier-Stokes e estruturam explicitamente e então desacoplar suas soluções a cada passo de tempo, conforme feito por Li; Sherwin; Bearman (2000). Desta forma, a cada passo de tempo, resolve-se as equações de Navier-Stokes de modo a obter as forças aerodinâmicas atuantes no corpo. Estas forças funcionam como entrada na equação estrutural, a qual fornece a velocidade do corpo no próximo passo de tempo. Após isso, as velocidades do corpo são utilizadas na resolução da equação do fluido.

Para a resolução das equações de Navier-Stokes com condições de contorno móveis existem algumas abordagens, sendo que a mais geral é realizada pelo método Arbitrário Lagrangiano-Euleriano (ALE). Em tal abordagem a malha computacional se deforma continuamente, fazendo com que o algoritmo de solução da equação discreta de Navier-Stokes se altere a cada passo de tempo. Portanto, através desta abordagem, não é possível usar algoritmos de solução diretos para malhas estáticas.

Uma outra maneira de resolver o problema de escoamento com condição de contorno móvel para um corpo rígido montado em uma base elástica seria acoplando um sistema de coordenada no corpo e resolver as equações de Navier-Stokes em uma referência móvel. Um exemplo disso seria aplicando uma transformação de coordenadas em um cilindro rígido.

Neste trabalho, será apresentado este último método, o qual é descrito na seção a seguir.

4.1 Desenvolvimento do método numérico

Para o desenvolvimento das expressões que regem o movimento do cilindro não será considerado o fenômeno de rotação. Portanto, assume-se que o corpo se movimenta em translação com um deslocamento $\mathbf{d} = (g(t), h(t))$ em um referencial absoluto (x', y') . Desta maneira, pode-se acoplar um referencial móvel no cilindro através das seguintes transformações:

$$x' = g(t) + x$$

$$y' = h(t) - y$$

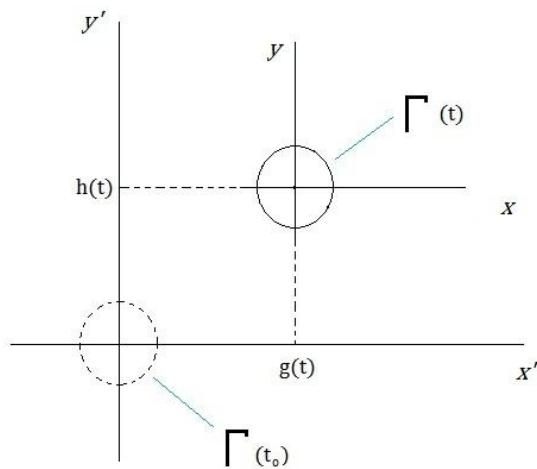


Figura 7 - Sistema de referência absoluto e relativo (móvel)

No sistema de equações anterior, as coordenadas x e y correspondem ao sistema de referência móvel acoplado ao cilindro enquanto que $g(t)$ e $h(t)$ correspondem às coordenadas da origem do referencial móvel no sistema de referência absoluto, como pode ser observado na figura 7.

4.1.2 Transformação das Equações de Navier-Stokes

Nesta seção, para fazer as transformações, será utilizada a notação matriz/vetor, portanto:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{d} + \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{Eq. 4.3 a}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^T(\mathbf{x}' - \mathbf{d}) \quad \text{Eq. 4.3 b}$$

onde,

$$\mathbf{x} = (x, y)^T, \quad \mathbf{x}' = (x', y')^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A velocidade do referencial móvel pode ser obtida através da diferenciação da equação 4.3 b:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T(\mathbf{v}' - \dot{\mathbf{d}}) \quad \text{Eq. 4.4}$$

Portanto, a velocidade do corpo no sistema de referência absoluto é dada por:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{A}\mathbf{v} + \dot{\mathbf{d}} \quad \text{Eq. 4.5}$$

Sabe-se também que:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{Eq. 4.6 a}$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{Eq. 4.6 b}$$

Considerando as relações anteriores, pode-se definir que:

$$\nabla' = \mathbf{A}\nabla, \quad (\nabla')^2 = (\nabla)^2 \quad \text{Eq. 4.7}$$

Portanto:

$$\nabla' \cdot \mathbf{v}' = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad \text{Eq. 4.8 a}$$

$$\nabla' p = \mathbf{A}\nabla p \quad \text{Eq. 4.8 b}$$

$$(\nabla')^2 \cdot \mathbf{v}' = \mathbf{A}\nabla^2 \cdot \mathbf{v} \quad \text{Eq. 4.8 c}$$

O termo não linear presente no referencial móvel pode também ser escrito na seguinte forma:

$$(\mathbf{v}' \cdot \nabla') \mathbf{v}' = [(\mathbf{A}\mathbf{v} + \dot{\mathbf{d}}) \cdot \mathbf{A}\nabla] (\mathbf{A}\mathbf{v} + \dot{\mathbf{d}}) = \mathbf{A}[(\mathbf{v} + \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{d}}) \cdot \nabla] \mathbf{v} = \mathbf{A}[(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + ((\mathbf{A}^T \dot{\mathbf{d}}) \cdot \nabla) \mathbf{v}]$$

Adotando os subscritos 'a' e 'r' para se referir aos referenciais absoluto e relativo (móvel), respectivamente, pode-se chegar às seguintes equações:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_a = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_r \quad \text{Eq. 4.9}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} \right)_a = (\mathbf{v}_c \cdot \nabla) \mathbf{v}' + \left(\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} \right)_r \quad \text{Eq. 4.10}$$

onde

$$\mathbf{v}_c = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_a = \dot{\mathbf{A}}^T (\mathbf{x}' - \mathbf{d}) - \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{d}} = -\mathbf{A}^T \dot{\mathbf{d}} \quad \text{Eq. 4.11}$$

Substituindo as equações 4.5 e 4.11 na equação 4.10, chega-se ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} \right)_a &= [(-\mathbf{A}^T \dot{\mathbf{d}}) \cdot \nabla] [\mathbf{A}(\mathbf{v} + \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{d}})] + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A}\mathbf{v} + \dot{\mathbf{d}})_r \\ &= \mathbf{A} [(-\mathbf{A}^T \dot{\mathbf{d}}) \cdot \nabla] \mathbf{v} + \dot{\mathbf{A}}\mathbf{v} + \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{A} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)_r \\ &= \mathbf{A} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)_r + [(-\mathbf{A}^T \dot{\mathbf{d}}) \cdot \nabla] \mathbf{v} + \mathbf{A}^T \ddot{\mathbf{d}} \right\} \end{aligned} \quad \text{Eq. 4.12}$$

Com isso, pode-se então substituir as equações 4.8, 4.9 e 4.12 nas equações 4.1 de Navier-Stokes, resultando nas equações de Navier-Stokes para o referencial móvel:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{Eq. 4.13 a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{G}(\mathbf{v}, t) \quad \text{Eq. 4.13 b}$$

Sendo $\mathbf{G}(\mathbf{v}, t) = -\mathbf{A}^T \ddot{\mathbf{d}}$.

A equação da vorticidade pode ser encontrada através das equações 4.5 e 4.6, resultando na seguinte expressão:

$$\omega' = \frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \omega \quad \text{Eq. 4.14}$$

A expressão anterior mostra que a transformação não altera a vorticidade. A explicação para isso reside no fato do cilindro não apresentar rotação em torno do seu eixo.

O desenvolvimento das equações de Navier-Stokes apresentado nesta seção mostra que, em movimentos não acelerados, o problema envolvendo um corpo que se move em um escoamento uniforme é equivalente ao de um corpo estacionário em um escoamento que se move.

4.1.3 Força e momento atuantes no cilindro

As forças e momentos que atuam no cilindro podem ser decompostas em componentes paralelos e perpendiculares à direção da velocidade do fluido no escoamento. Estas decomposições serão utilizadas no solucionador numérico, o qual é discutido posteriormente neste trabalho.

A força exercida pelo fluido no cilindro é um resultado da integração da tensão local (σ) ao longo de toda a superfície do corpo. Tal tensão é composta pela soma vetorial da pressão local do fluido (p) e da tensão de cisalhamento local (τ). Assim, desta forma chegam-se às seguintes expressões:

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \tau \quad \text{Eq. 4.15}$$

$$\mathbf{F} = \int \sigma \mathbf{n}' ds' = - \int p \mathbf{n}' ds' + \int \tau \mathbf{n}' ds' = \mathbf{F}'_p + \mathbf{F}'_\nu$$

Eq. 4.16

Nas equações anteriores, \mathbf{n}' é o vetor unitário normal à superfície do cilindro e que aponta para fora deste e \mathbf{F}'_p e \mathbf{F}'_ν são as componentes correspondentes à pressão do fluido e à força viscosa, respectivamente. O que se deve notar é que a integral anterior está definida no sistema de referência absoluto. Porém, força total \mathbf{F} exercida no cilindro pode ser encontrada também através das componentes da força no sistema de referência relativo (\mathbf{F}_p e \mathbf{F}_ν) utilizando a transformação pela matriz \mathbf{A} , como é mostrado a seguir:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'_p + \mathbf{F}'_\nu = \mathbf{A}(\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_\nu) \quad \text{Eq. 4.17}$$

O momento (\mathbf{M}') em relação a um ponto \mathbf{P} é definido no referencial absoluto por:

$$\mathbf{M}' = \int \mathbf{r}' \wedge (\sigma \cdot \mathbf{n}') ds' = - \oint p(\mathbf{r}' \wedge \mathbf{n}') ds' + \oint \mathbf{r}' \wedge (\tau \cdot \mathbf{n}') ds' = \mathbf{M}'_p + \mathbf{M}'_\nu$$

Eq. 4.18

Na expressão do momento, \mathbf{r}' é o vetor raio entre o ponto \mathbf{P} e o elemento na superfície do cilindro. Se for considerado que $\mathbf{P} = \mathbf{d}$, ou seja, o momento é em relação ao centro do cilindro, e que \mathbf{x}' pertence à superfície deste, então:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{x}' - \mathbf{d} = \mathbf{d} + \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{Eq. 4.19}$$

Portanto, em um caso bidimensional, resulta a seguinte expressão:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} = - \oint p(\mathbf{x} \wedge \mathbf{n}) d\mathbf{s} + \oint \mathbf{x} \wedge (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) d\mathbf{s}$$

Eq. 4.20

Desta maneira, pode-se calcular o momento em um sistema de referência relativo (móvel).

4.1.4 Equação de movimento do cilindro

Em um corpo rígido que se move em duas dimensões com rotação nula, seu movimento pode ser descrito através de dois componentes de deslocamento (δ_x e δ_y), sendo um na direção x e o outro na direção y . Assim, pode-se escrever o vetor deslocamento (\mathbf{X}) na seguinte forma:

$$\mathbf{X} = (\delta_x, \delta_y)^T \quad \text{Eq. 4.21}$$

A equação que rege o movimento do cilindro é, portanto:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \bar{\mathbf{F}} \quad \text{Eq. 4.22}$$

onde \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente, e $\bar{\mathbf{F}}$ é o vetor que possui os componentes das forças externas que atuam no cilindro. Para resolver a equação 4.22, pode ser empregado o método trapezoidal, descrito através das equações a seguir:

$$\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{X}^n + \frac{1}{2}\Delta t(\mathbf{V}^n + \mathbf{V}^{n+1}) \quad \text{Eq. 4.23 a}$$

$$\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V}^n + \frac{1}{2}\Delta t(\mathbf{B}^n + \mathbf{B}^{n+1}) \quad \text{Eq. 4.23 b}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{B}^{n+1} + \mathbf{C}\mathbf{V}^{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{X}^{n+1} = \bar{\mathbf{F}}^{n+1} \quad \text{Eq. 4.23 c}$$

onde \mathbf{X}^n , \mathbf{V}^n e \mathbf{B}^n são aproximações numéricas para \mathbf{X} , $\dot{\mathbf{X}}$ e $\ddot{\mathbf{X}}$, respectivamente no instante de tempo $t_n = n\Delta t$. Neste esquema, pode-se notar que não há a necessidade de se avaliar o termo de força $\bar{\mathbf{F}}$ no instante de tempo $n + 1$. Entretanto, para um algoritmo acoplado de interação fluido-estrutura, é necessário que $\bar{\mathbf{F}}^{n+1}$ seja independente de $\bar{\mathbf{V}}^{n+1}$, e portanto, não pode ser avaliado diretamente. Considera-se então a seguinte aproximação:

$$\bar{\mathbf{F}}^{n+1} \approx \beta \bar{\mathbf{F}}^n + (1 - \beta) \bar{\mathbf{F}}^{n-1} \quad \text{Eq. 4.24}$$

onde o parâmetro β é utilizado como um parâmetro de extrapolação. Se $\beta = 3/2$, por exemplo, tem-se uma extrapolação de segunda ordem para $\bar{\mathbf{F}}^{n+1}$.

4.1.5 Algoritmo de acoplamento

Um procedimento computacional para o acoplamento entre fluido e estrutura é mostrado a seguir.

Depois de ter calculado a solução no instante de tempo n , executam-se os seguintes passos:

- a) Calcular o vetor força $\bar{\mathbf{F}}^n$ e utilizar a aproximação por extrapolação (Eq. 4.24) para se obter $\bar{\mathbf{F}}^{n+1}$.
- b) Resolver o sistema das equações estruturais (Eqs. 4.23) para se obter \mathbf{X}^{n+1} , \mathbf{V}^{n+1} e \mathbf{B}^{n+1} .
- c) Resolver as equações de Navier-Stokes (Eqs. 4.13) para os instantes t_n e t_{n+1} usando os resultados de \mathbf{V}^{n+1} .
- d) Atualizar $n = n + 1$ e retornar ao passo a).

4.1.6 Discretização temporal das equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes para escoamento incompressível em um referencial móvel pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \mathbf{v} \mathbf{L}(\mathbf{v}) + \mathbf{N}(\mathbf{v}) \quad \text{Eq. 4.25}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{L}(\mathbf{v}) &\equiv \nabla^2 \mathbf{v} \\ \mathbf{N}(\mathbf{v}) &\equiv -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{G}(\mathbf{v}, t)\end{aligned}$$

e $\mathbf{G}(\mathbf{v}, t) = -\mathbf{A}^T \ddot{\mathbf{d}}$, como havia sido definido anteriormente. Os termos p e \mathbf{v} correspondem respectivamente aos vetores pressão e velocidade.

O esquema de discretização temporal para o método numérico pode ser dividido em três passos:

$$\frac{\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q \mathbf{N}(\mathbf{v}^{n-q}) \quad \text{Eq. 4.26 a}$$

$$\frac{v^* - \hat{\mathbf{v}}}{\Delta t} = -\nabla \bar{p}^{n+1} \quad \text{Eq. 4.26 b}$$

$$\frac{v^{n+1} - v^*}{\Delta t} = \mathbf{v} \sum_{q=0}^{J_i-1} \gamma_q \mathbf{L}(\mathbf{v}^{n+1-q}) \quad \text{Eq. 4.26 c}$$

No primeiro passo, os termos de força e advecção não linear são obtidos através de uma forma convectiva a qual é integrada no tempo utilizando um esquema *Adams-Basforth* multinível indicado pelos coeficientes β_q .

No segundo passo, a pressão média no tempo (\bar{p}) é obtida pelo divergente de Eq. 23c, assumindo $\nabla \cdot \mathbf{v}^* = 0$, para chegar na equação de Poisson com as condições de contorno, como é apresentado na seguinte expressão:

$$\frac{\partial p^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \left\{ -\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} \right\} - \mathbf{n} \cdot \left\{ \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{G} + \mathbf{v} \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v})]^{n-q} \right\}$$

Eq. 4.27

Tais condições de contorno asseguram que o erro de divisão associado ao esquema é consistente com a discretização temporal geral.

4.1.6 Discretização espacial das equações de Navier-Stokes através do Método de Elementos Espectrais

O software utilizado nas simulações do presente trabalho emprega o Método de Elementos Espectrais na discretização das equações diferenciais parciais provenientes da modelagem do problema em questão. Os principais conceitos e características de tal método são detalhados nesta seção.

O tipo de escoamento dos experimentos deste trabalho é governado pelas equações de Navier-Stokes visto que se trata de um escoamento viscoso incompressível de um fluido newtoniano.

Tais equações podem ser escritas em sua forma adimensional tendo o diâmetro D como comprimento de referência e a velocidade de escoamento ao longe U_∞ como velocidade de referência. A equação então é escrita na seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad \text{Eq. 4.28}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{Eq. 4.29}$$

sendo que $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ o campo de velocidades, t é o tempo, p é a pressão estática e $Re = \rho U_\infty D / \mu$ é o número de Reynolds, onde μ é a viscosidade dinâmica do fluido em questão.

Para que as equações diferenciais parciais 4.28 e 4.29 possam ser resolvidas numericamente por um algoritmo computacional, elas precisam ser discretizadas apropriadamente. No Método de Elementos Espectrais o esquema de discretização é baseado em dois métodos previamente conhecidos: o Método dos Elementos Finitos (FEM) e o Método Espectral Clássico.

A principal ideia do Método dos Elementos Finitos é dividir o domínio de interesse (Ω) em subdomínios que não se sobreponham, conhecidos também como elementos (Ω^e), e calcular a solução da equação através de uma sequência de aproximações encontradas em cada elemento do domínio. Tais aproximações consistem de combinações lineares de funções de base, as quais possuem certas características que asseguram a continuidade da aproximação da solução global no domínio de

interesse Ω . A convergência da solução através deste método pode ser obtida através do refinamento da malha no domínio Ω , visto que as funções de base empregadas neste método são geralmente de baixa ordem (polinômios lineares ou quadráticos).

O Método Espectral Clássico, por sua vez, não emprega nenhuma discretização espacial, entretanto ele se utiliza de funções de alta ordem para aproximar a solução das equações diferenciais em todo o domínio.

O Método de Elementos Espectrais é proveniente da junção das duas principais características dos métodos descritos anteriormente, ou seja, o uso de funções de alta ordem como funções de base na discretização espacial do Método dos Elementos Finitos. Isso permite que a convergência da solução seja obtida de duas maneiras: pelo refinamento da malha, conhecido como convergência h , ou aumentando a ordem das funções de base, conhecido como convergência p .

Neste trabalho, foi adotada um discretização espacial utilizando o método dos elementos espetrais. O domínio o qual está inserido o cilindro é dividido em subdomínios triangulares. Deste modo, a solução é expandida dentro de cada subdomínio utilizando uma expansão polinomial arbitrária de ordem p .

4.2 Validação e simulação do escoamento

Tomando os termos da equação de Navier-Stokes em sua forma adimensional, chegam-se às seguintes equações:

$$\nabla^* \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{Eq. 4.28 a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* = -\nabla^* p^* + Re^{-1} (\nabla^*)^2 \mathbf{v}^* \quad \text{Eq. 4.28 b}$$

Os termos adimensionalizados nas equações anteriores são os seguintes:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{D} ; & y^* &= \frac{y}{D} ; & t^* &= \frac{tU}{D} ; \\ u^* &= \frac{u}{U} ; & v^* &= \frac{v}{U} ; & p^* &= \frac{p}{pU^2} ; \end{aligned}$$

$$Re = \frac{\rho UD}{\mu} = \frac{UD}{v}$$

onde D , U , e ρ são o diâmetro do cilindro, a velocidade ao longe do escoamento e a densidade do fluido, respectivamente. Da mesma maneira, foram adimensionalizados os termos de força:

$$F_x^* = \frac{F_x}{\rho DU^2} ; \quad F_y^* = \frac{F_y}{\rho DU^2}$$

Em relação aos termos adimensionais, é interessante observar que $C_L = 2F_x^*$ e $C_L = 2F_y^*$. Além disso, não foi considerado o termo que diz respeito ao momento, pois este é nulo, devido ao fato de o cilindro não sofrer rotação.

Outros termos adimensionais importantes são o parâmetro de massa (m^*), a velocidade reduzida (V_r) e a amplitude adimensional (A^*):

$$m^* = \frac{m}{\rho D^2} ; \quad V_r = \frac{U}{f_n D} ; \quad A^* = \frac{A}{D}$$

4.2.1 Oscilação vertical forçada

O movimento senoidal forçado de um corpo rígido pode ser descrito através da seguinte equação de movimento:

$$y(t) = A \cos(2\pi ft) \quad \text{Eq. 4.29}$$

Em tal situação, a frequência de emissão de vórtices pode ser controlada em uma certa faixa de valores de velocidade reduzida. Este fenômeno, conhecido como *lock-in*, acontece quando a frequência de emissão de vórtices e a frequência de oscilação do corpo se sincronizam. Tanto em procedimentos experimentais quanto em simulações numéricas, foi mostrado que este fenômeno de sincronização ocorre somente acima de um determinado valor de amplitude de oscilação.

4.2.2 Oscilação vertical livre

A equação que descreve o movimento de oscilação vertical livre pode ser escrita em sua forma adimensional da seguinte maneira:

$$\ddot{y}^* + 2\xi \left(\frac{2\pi}{V_r}\right) \dot{y}^* + \left(\frac{2\pi}{V_r}\right)^2 y^* = \frac{F_y^*}{m^*} \quad \text{Eq. 4.30}$$

onde ξ corresponde a um fator de amortecimento na direção y .

4.2.3 Oscilação longitudinal livre

A equação que descreve o movimento de oscilação longitudinal livre pode ser escrita em sua forma adimensional da seguinte maneira:

$$\ddot{x}^* + 2\xi \left(\frac{2\pi}{V_r}\right) \dot{x}^* + \left(\frac{2\pi}{V_r}\right)^2 x^* = \frac{F_x^*}{m^*} \quad \text{Eq. 4.31}$$

onde ξ corresponde a um fator de amortecimento na direção x .

5. Simulações numéricas para os casos de 1 e 2 graus de liberdade

5.1 Teste de convergência

Para que as simulações pudessem fornecer resultados coerentes, primeiramente, foi realizado um teste de convergência. Neste teste, foram utilizadas várias configurações de malhas de modo a obter uma malha definitiva que simulasse de maneira próxima ao caso real a um custo computacional relativamente baixo. Para isso, foram utilizados alguns parâmetros de convergência, os quais são descritos a seguir:

P: ordem do grau do polinômio do algoritmo computacional;

W: distância vertical entre as extremidades inferior e superior da malha;

La: distância horizontal entre a extremidade esquerda (montante) da malha e o centro do cilindro;

Lb: distância horizontal entre o centro do cilindro e a extremidade direita (jusante) da malha.

O critério de convergência foi baseado na convergência dos valores do coeficiente de arrasto (C_D) e do número de Strouhal (St) para cada parâmetro.

O teste de convergência foi realizado da seguinte maneira:

- 1) Determina-se uma malha inicial com valores arbitrários de parâmetros geométricos;
- 2) São feitas, então, algumas simulações alternando o parâmetro polinomial (P);
- 3) Feito isso, determina-se o grau de polinômio o qual o C_D e o St convergem com um erro menor que 1,5%;
- 4) Obtido o grau do polinômio, fazem-se então algumas simulações alternando o parâmetro W e deixando os outros parâmetros constantes;
- 5) Feito isso, determina-se o valor de W o qual o C_D e o St convergem com um erro menor que 1,0%;
- 6) Obtido o valor definitivo de W, fazem-se então algumas simulações alternando o parâmetro La e deixando os outros parâmetros constantes;

- 7) Feito isso, determina-se o valor de La o qual o C_D e o St convergem com um erro menor que 1,0%;
- 8) Obtido o valor definitivo de La, fazem-se então algumas simulações alternando o parâmetro Lb e deixando os outros parâmetros constantes;
- 9) Feito isso, determina-se o valor de Lb o qual o C_D e o St convergem com um erro menor que 1,0%;
- 10) A malha definitiva é obtida.

No teste de convergência realizado, chegou-se aos seguintes valores definitivos (em unidades adimensionais):

P	W	La	Lb
8	25	20	20

A malha definitiva utilizada nas simulações é ilustrada a seguir nas figuras 8 e 9.

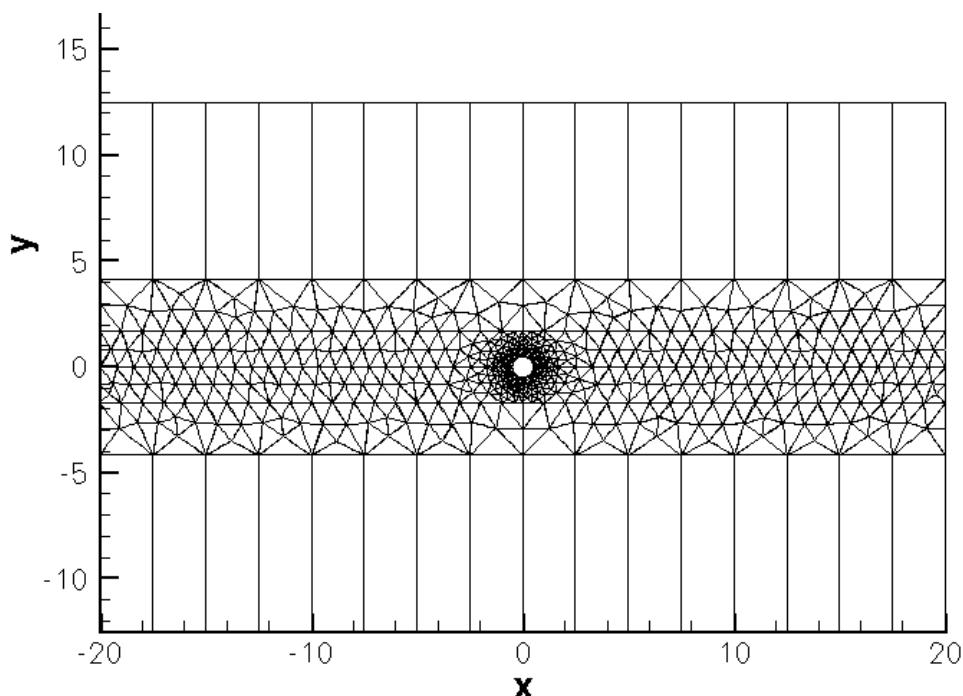


Figura 8 - Malha definitiva

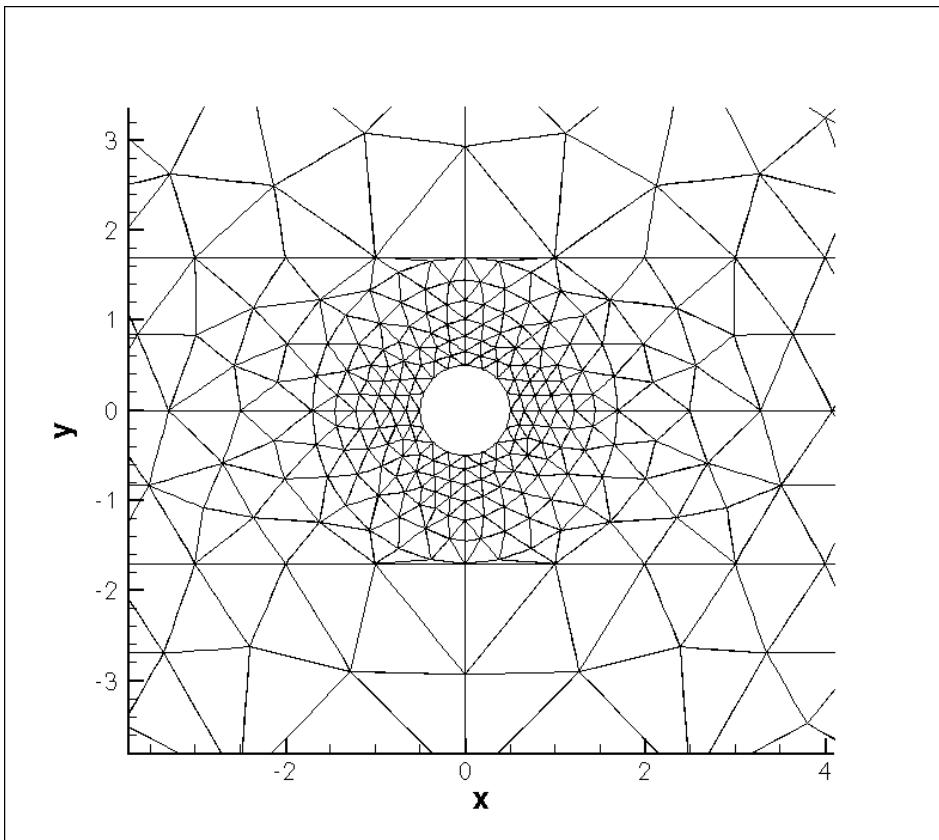


Figura 9 - Malha definitiva (cilindro)

5.2 Simulações

Depois de ter obtido a malha definitiva, foram executadas as simulações numéricas para o caso em questão.

A primeira bateria de simulações consistiu no movimento com um grau de liberdade do cilindro na direção transversal ao escoamento (direção y), sendo, portanto, restrinrido o seu movimento na direção longitudinal (direção x). Na segunda bateria, foi considerado tanto o movimento longitudinal quanto o transversal, sendo, portanto, um movimento com dois graus de liberdade. O movimento de rotação do cilindro foi restrinrido em todas as simulações.

Os parâmetros utilizados em todos os casos foram os seguintes:

$$U_\infty = 1 \text{ m/s}$$

$$\nu = 1/150 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$D = 1 \text{ m}$$

U_∞ : velocidade do fluido ao longe
 ν : viscosidade cinemática do fluido
 D : diâmetro

Portanto, com estes parâmetros, obteve-se $Re = 150$.

5.3 Resultados

5.3.1 Movimento com um grau de liberdade (1 DOF)

Os resultados obtidos nas simulações para o caso de um grau de liberdade (1 DOF) (gráficos 1 ao 3) mostram as respostas típicas de vibrações induzidas por vórtices para baixos números de Reynolds. Pode-se perceber que existe uma faixa de valores a qual acontece o fenômeno de sincronização (*lock-in*), onde a frequência de emissão de vórtices se aproxima a um valor próximo à frequência natural da estrutura. O fenômeno de *lock-in* pode ser dividido em duas partes: a parte inicial e a parte final (decrescente). A parte inicial abrange a faixa de velocidade reduzida (V_r) entre aproximadamente 3,0 e 4,5. É inclusive nessa faixa que a amplitude atinge o valor máximo, que é de aproximadamente $A/D \approx 0,58$. O ângulo de fase nessa região está próximo de 0° . Os pontos contidos na faixa $4,5 \leq V_r \leq 5,5$ mostram a transição entre a parte inicial e a parte decrescente, correspondendo a uma rápida mudança do ângulo de fase de um valor próximo a 0° a um valor perto de 180° . A parte decrescente do fenômeno de sincronização continua até uma velocidade reduzida de aproximadamente 7,5 e, para $V_r \geq 8,0$ as amplitudes de vibração se mantém baixas ($A/D \leq 0,05$) e com um ângulo de fase muito próximo de 180° .

Gráfico 1 – Amplitude Vs Velocidade Reduzida (1 DOF)

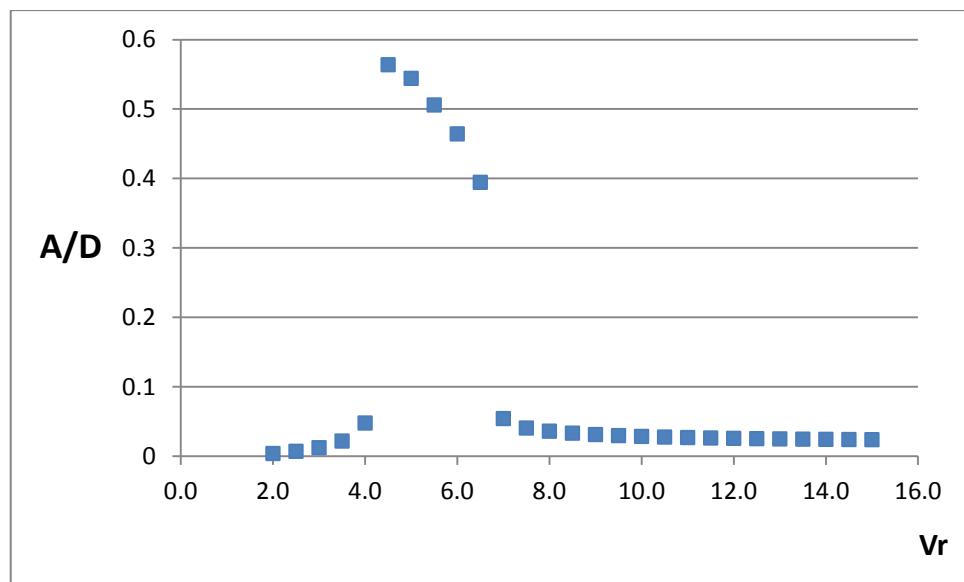


Gráfico 2 – Coeficiente de arrasto Vs Velocidade Reduzida (1DOF)

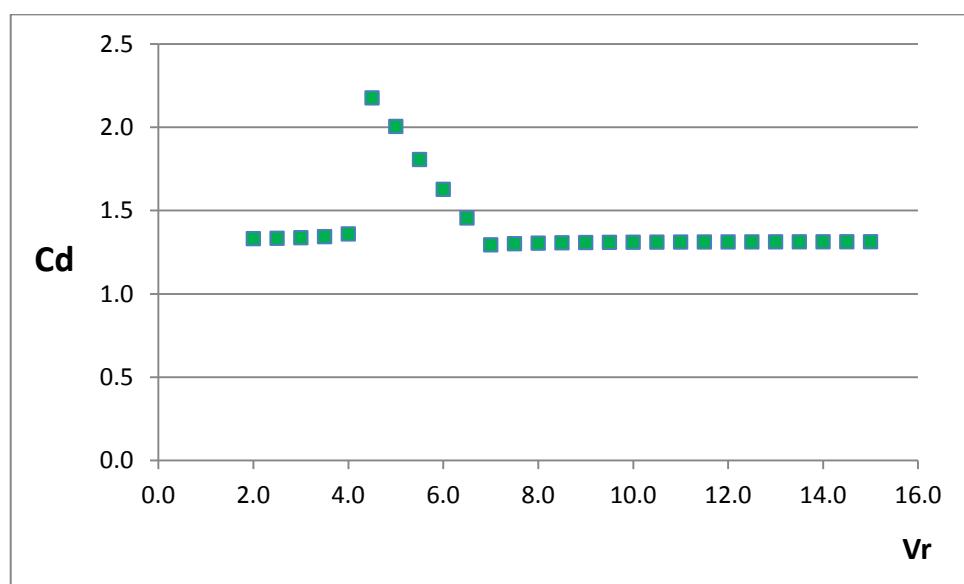
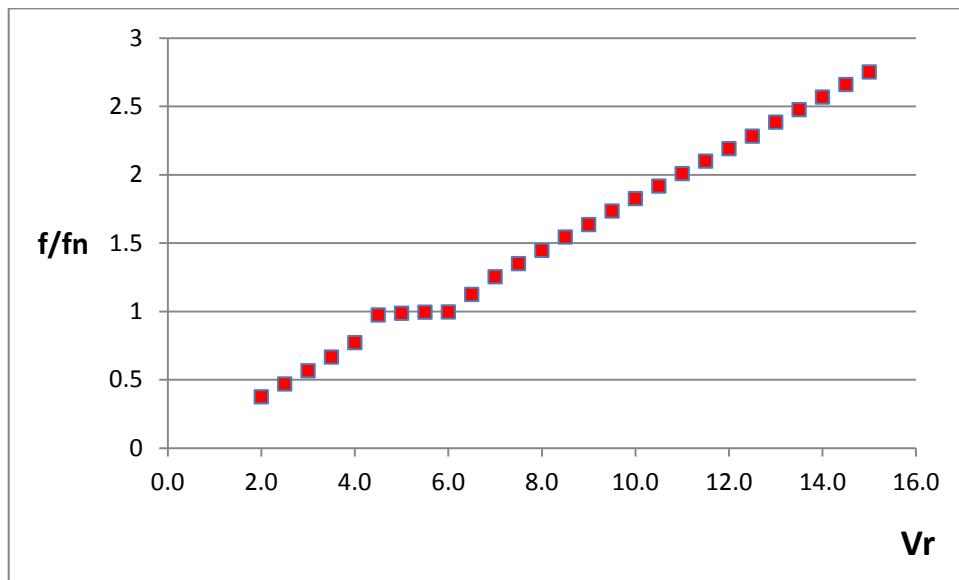


Gráfico 3 - Frequência Vs Velocidade Reduzida (1DOF)



5.3.2 Movimento com dois graus de liberdade (2 DOF)

Os gráficos obtidos no movimento com dois graus de liberdade (2 DOF) (gráficos 4 ao 7) seguem a mesma tendência do de 1 DOF, com a diferença devido ao aparecimento da amplitude no movimento longitudinal (A_x/D). Entretanto, sua amplitude é muito menor que a correspondente ao movimento transversal (A_y/D), sendo que o seu máximo valor atinge $A_x/D \approx 0.0095$, enquanto o máximo valor de A_y/D é de $A_y/D \approx 0.58$. As faixas de velocidade reduzida relativas aos trechos inicial e final (decrescente) do fenômeno de sincronização são praticamente as mesmas obtidas no movimento com 1 DOF.

Gráfico 4 – Amplitude Longitudinal Vs Velocidade Reduzida (2DOF)

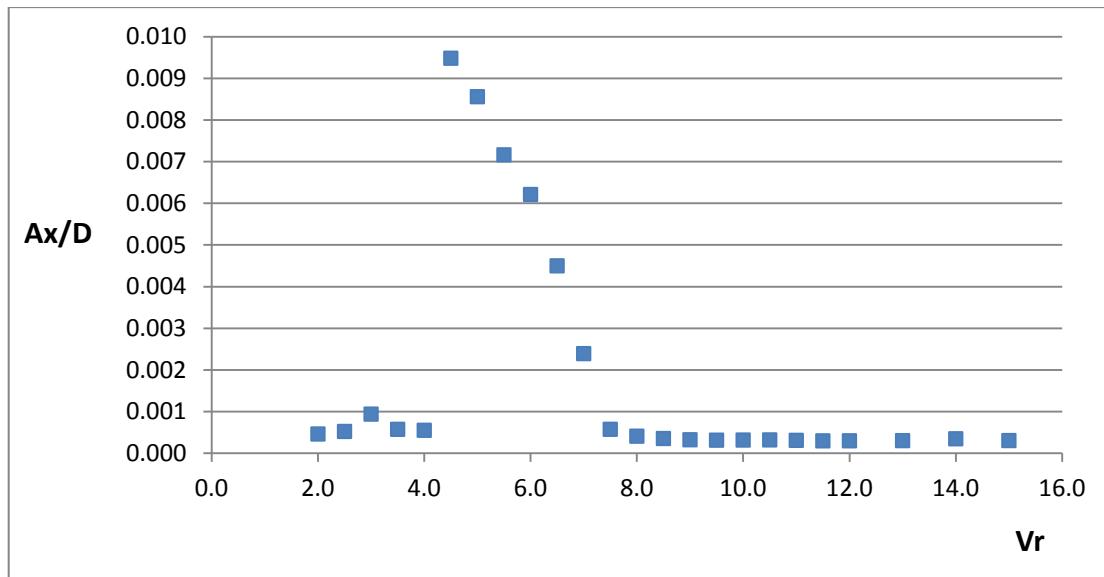


Gráfico 5 - Amplitude Transversal Vs Velocidade Reduzida (2DOF)

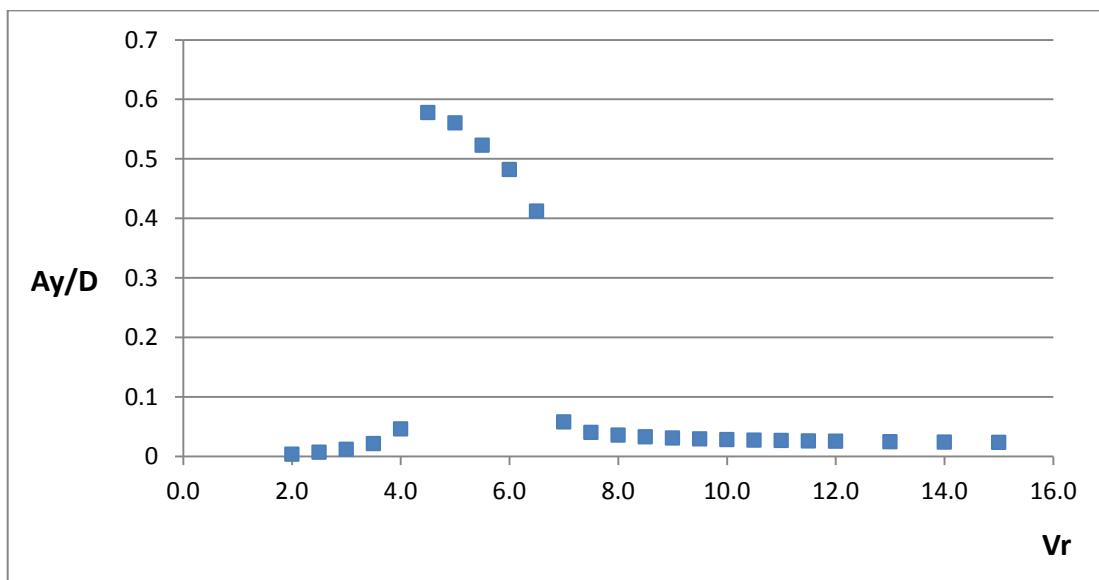


Gráfico 6 – Coeficiente de Arrasto Vs Velocidade Reduzida (2DOF)

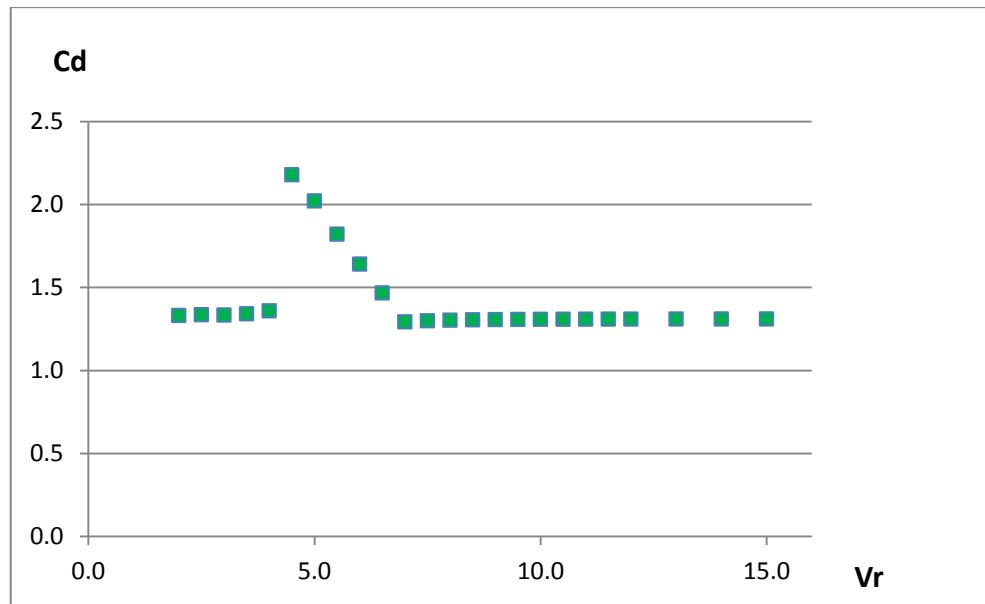
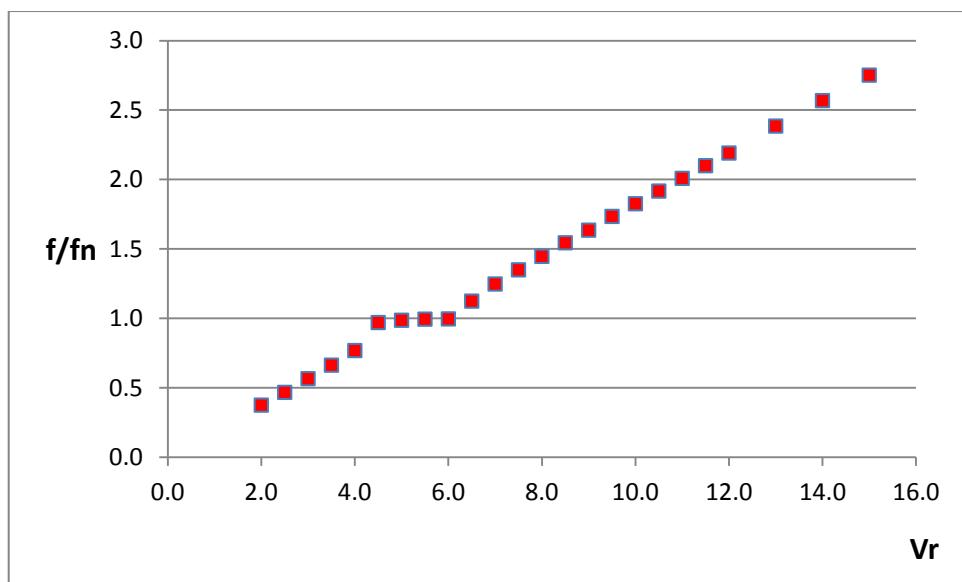


Gráfico 7 – Frequência Vs Velocidade Reduzida (2DOF)



A seguir são ilustradas figuras representando os campos de pressões e de velocidade longitudinal (u) em alguns casos de 1 DOF.

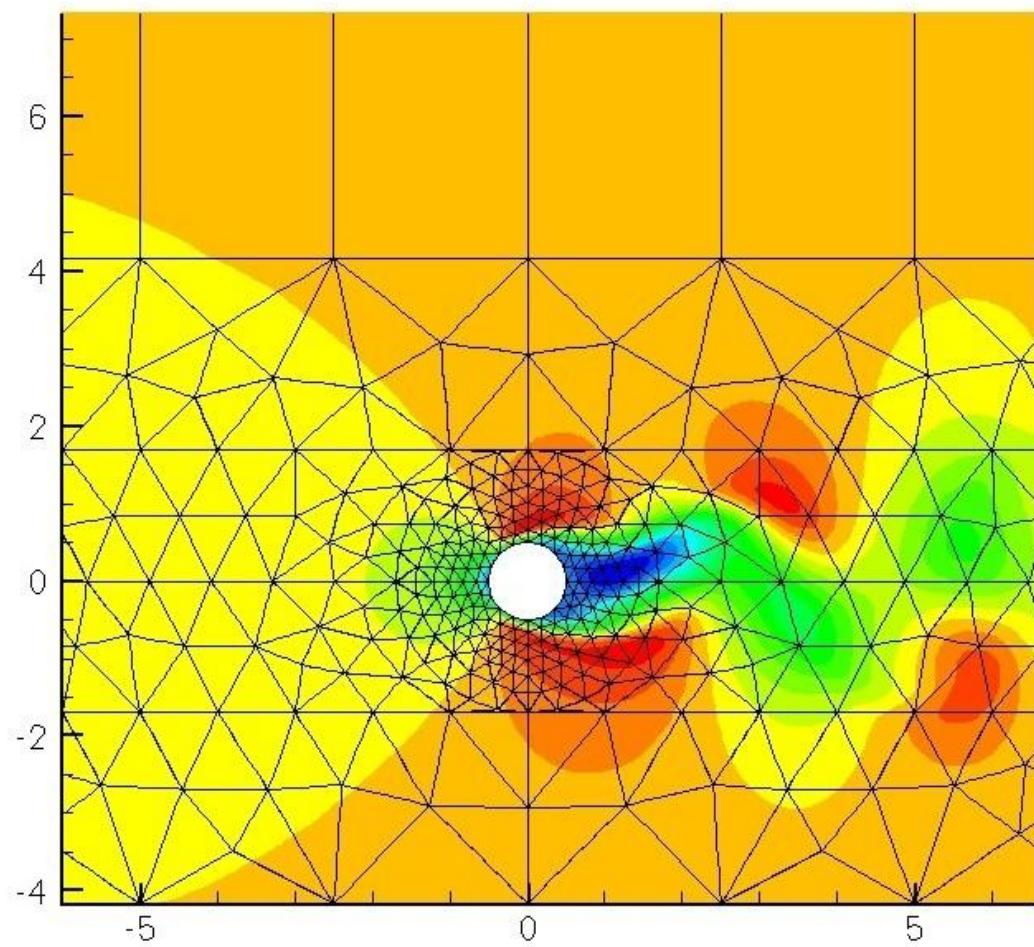
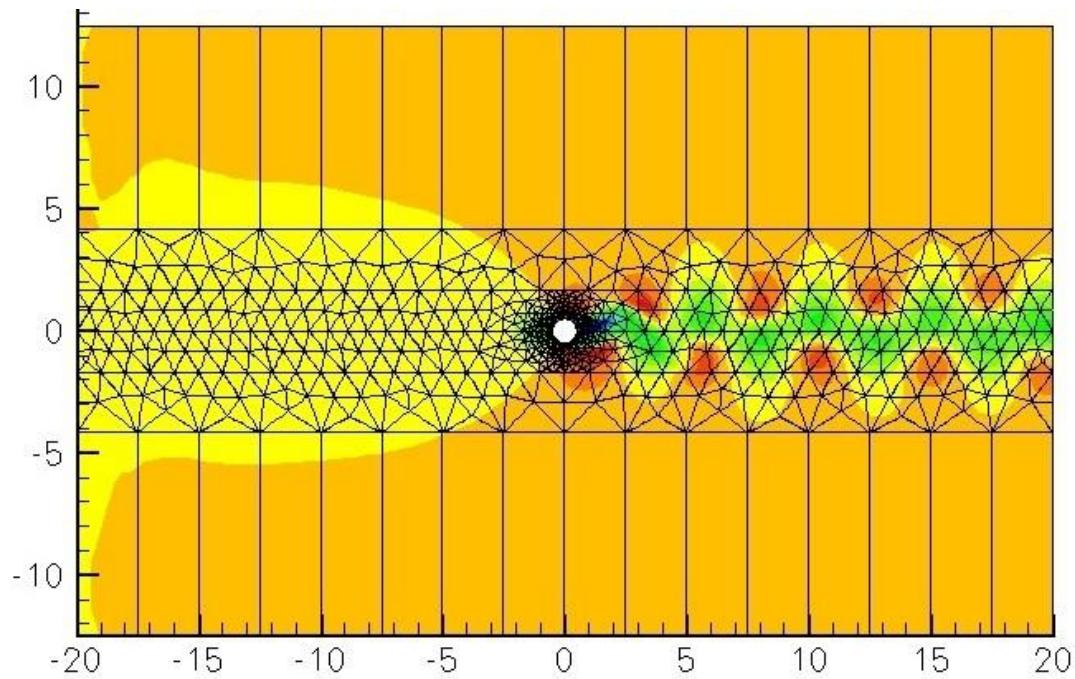


Figura 10 – Campo de velocidades (u) com $V_r = 2,0$ – 1DOF

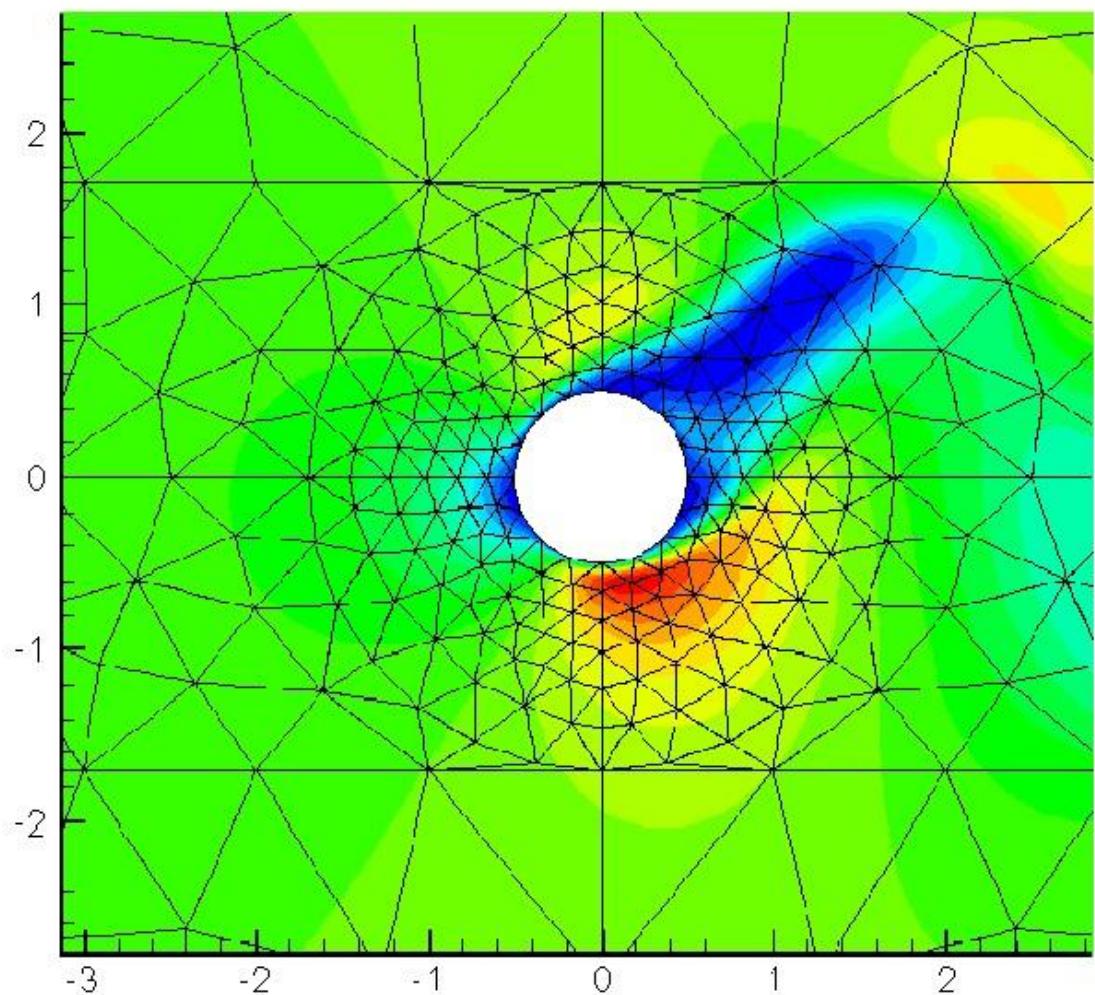
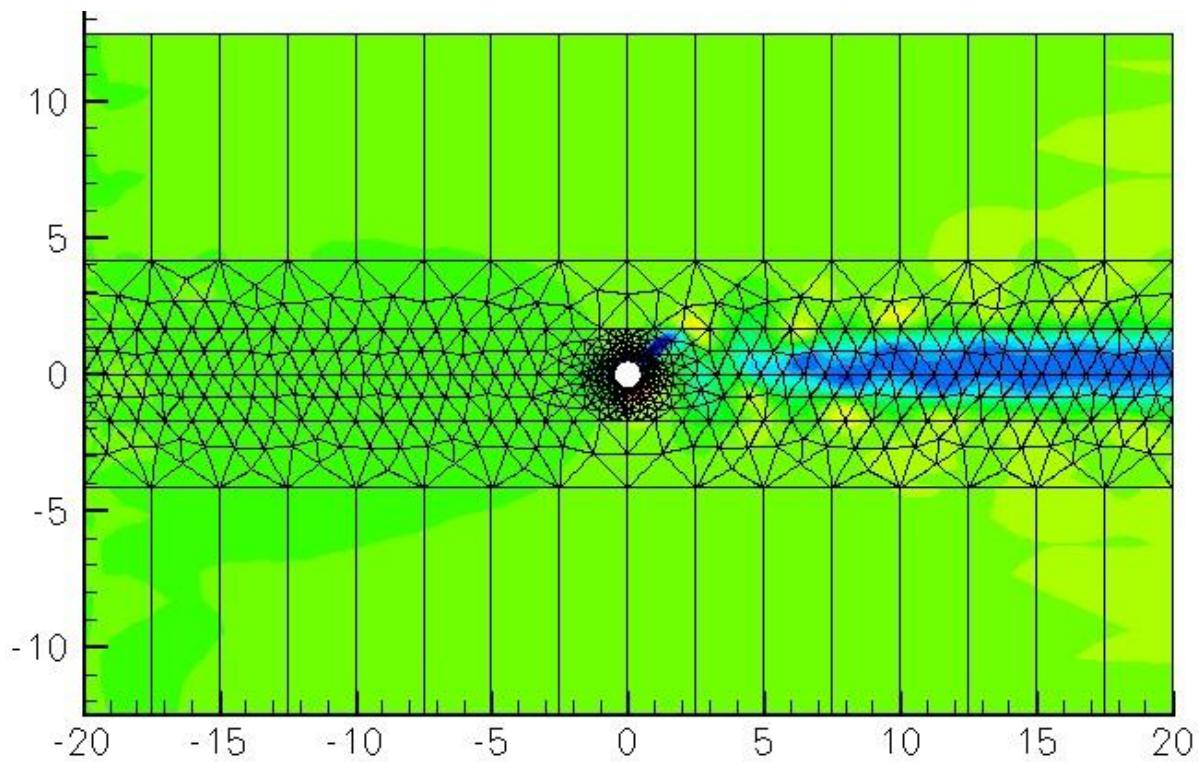


Figura 11 - Campo de velocidades (u) com $V_r = 5,0$ – 1DOF

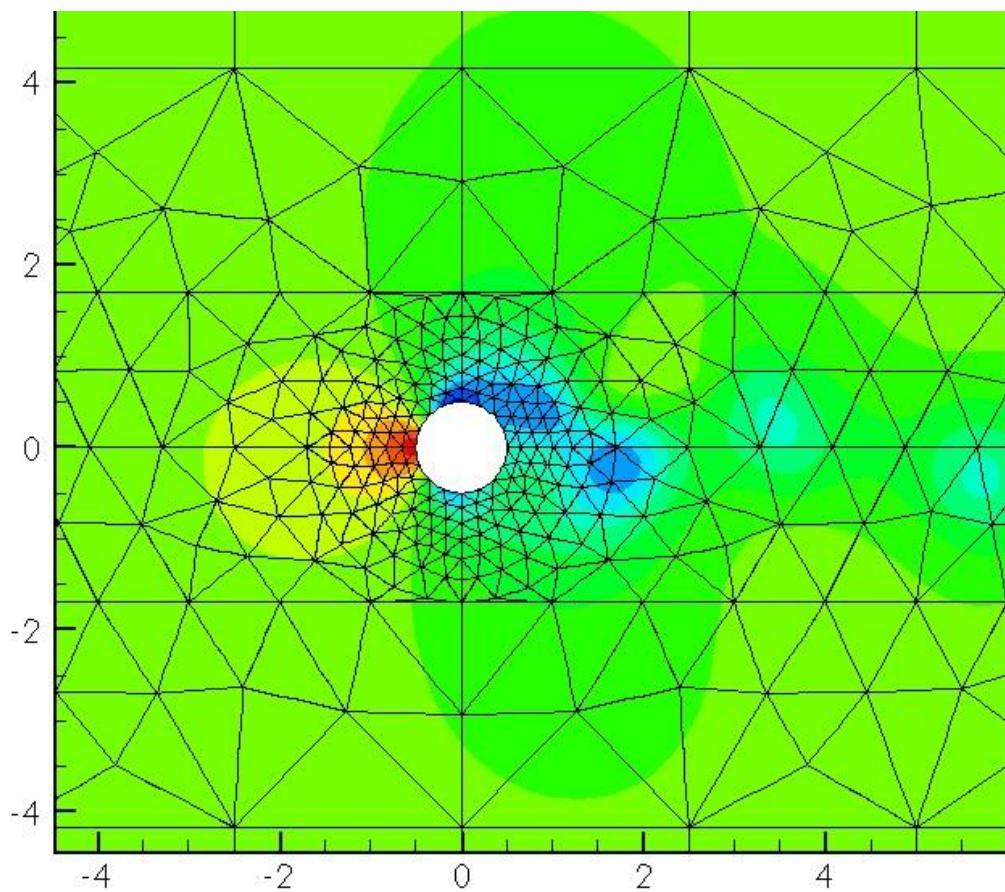


Figura 12 - Campo de pressões com $V_r = 2,0$ – 1DOF

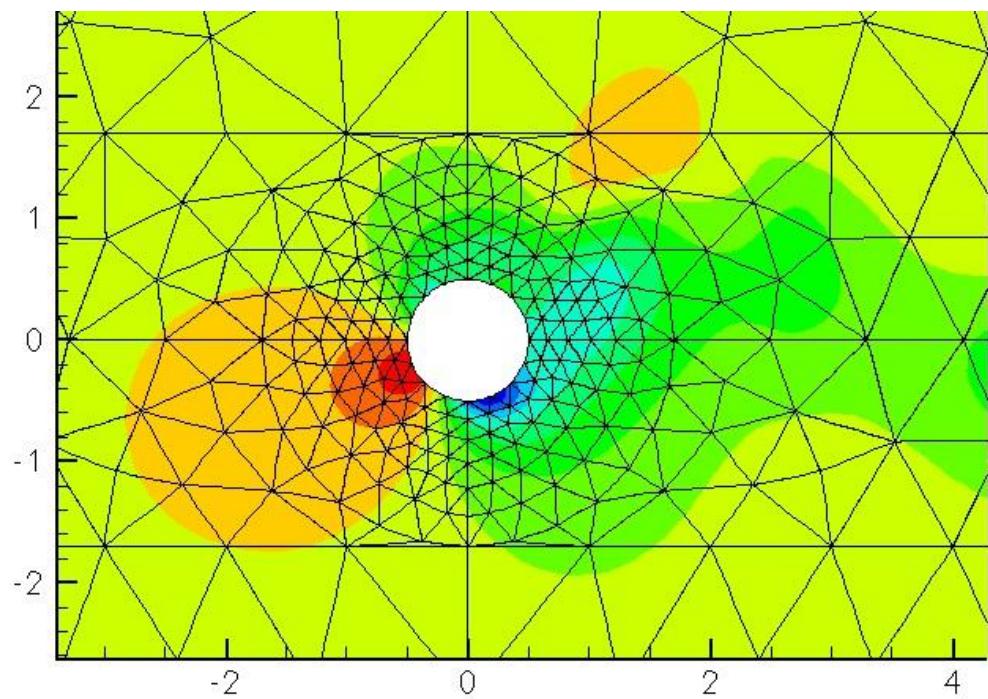


Figura 13 - Campo de pressões com $V_r = 5,0$ – 1DOF

6. Simulações numéricas 3D

6.1 Teste de convergência

Para que as simulações pudessem fornecer resultados coerentes, foi realizado um teste de convergência para simulações tridimensionais assim como nos casos com 1 e 2 DOF. Diferentemente do que fora feito anteriormente, os parâmetros envolvidos para a execução do teste foram outros, uma vez que a malha definitiva já fora obtida e, portanto, não sendo necessário alterar os parâmetros de malha. Portanto, utilizou-se do número de modos na direção do eixo (Z) como parâmetro de teste.

O objetivo deste teste de convergência é obter o valor mínimo de Z no qual os resultados convirjam. A escolha de um valor mínimo de Z tem o como intuito a realização futura de simulações tridimensionais com uma boa precisão e ao mesmo tempo um mínimo custo computacional.

Para este teste de convergência, foi escolhido um número de Reynolds igual a 300. Visto que a turbulência aumenta quanto maior for o valor de Re, procurou-se utilizar o valor escolhido para o caso crítico de uma situação.

A malha empregada para este teste é a mesma obtida no teste para 1 e 2 DOF (Figuras 8 e 9), a qual apresenta um refinamento na região de esteira próxima.

Assim como nos casos com 1 e 2 DOF, o critério de convergência foi baseado na convergência dos valores do coeficiente de arrasto (C_D) e do número de Strouhal (St) para cada parâmetro. Com o objetivo de se obter valores mais consistentes tanto de C_D quanto de St , as simulações foram realizadas com 250 passos de tempo adimensionais com comprimento periódico $L = 5D$. Para minimizar os custos computacionais, a resolução de St escolhida para este teste é 0,005.

Os valores de Z obtidos no teste são apresentados na tabela a seguir.

Número de modos (Z)	C_D	St
16	divergiu	divergiu
32	1,287	0,205
48	1,282	0,205
64	1,291	0,210

Observa-se nos valores tabelados que tanto o coeficiente de arrasto quanto o número de Strouhal variam muito pouco com os valores de Z que não divergem (32,

48 e 64), sendo uma diferença de menos de 1% para C_D e aproximadamente 2,5% para St .

Portanto, foi o escolhido o menor valor do número de modos entre eles, $Z = 32$, para a execução das simulações dos escoamentos tridimensionais.

6.2 Simulações

Depois de ter obtido o valor do número de modos para o caso tridimensional junto com a malha definitiva, as simulações numéricas foram executadas para o caso em questão.

Esta bateria de simulações consistiu no movimento com dois graus de liberdade do cilindro rígido em suas direções transversal (direção y) e longitudinal (direção x) ao escoamento, sendo semelhante ao caso descrito no item 5.2. Entretanto, para este caso, considerou-se também uma profundidade de $5D$ na direção z , dando portanto um caráter tridimensional para este experimento.

Em cada teste simulado foi adotado um valor específico de velocidade reduzida Vr variando-o de 2 a 10, de modo a se verificar a resposta do movimento em cada caso.

Os parâmetros que foram utilizados nestas simulações são os seguintes:

$$U_\infty = 1 \text{ m/s}$$

$$\nu = 1/300 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$D = 1 \text{ m}$$

$$Re = 300$$

6.3 Resultados

Os resultados obtidos nas simulações tridimensionais não diferem muito dos que ocorrem no caso com 2 DOF sem a profundidade na direção z , com a região de *lock-in* ocorrendo na faixa de valores de velocidade reduzida entre aproximadamente 3,5 e 7,0.

O que se pode notar de diferente são os valores máximos das amplitudes e do Cd que são menores devido à estrutura tridimensional considerada. Neste caso, Ay/D máximo está em torno de 0,51 ao passo que o Cd máximo é aproximadamente 2,1. Em ambos os casos o Vr é próximo de 4,5. Tais resultados são apresentados nos gráficos 8, 9 e 10 a seguir.

Gráfico 8 – Amplitude Transversal Vs Velocidade Reduzida (3d)

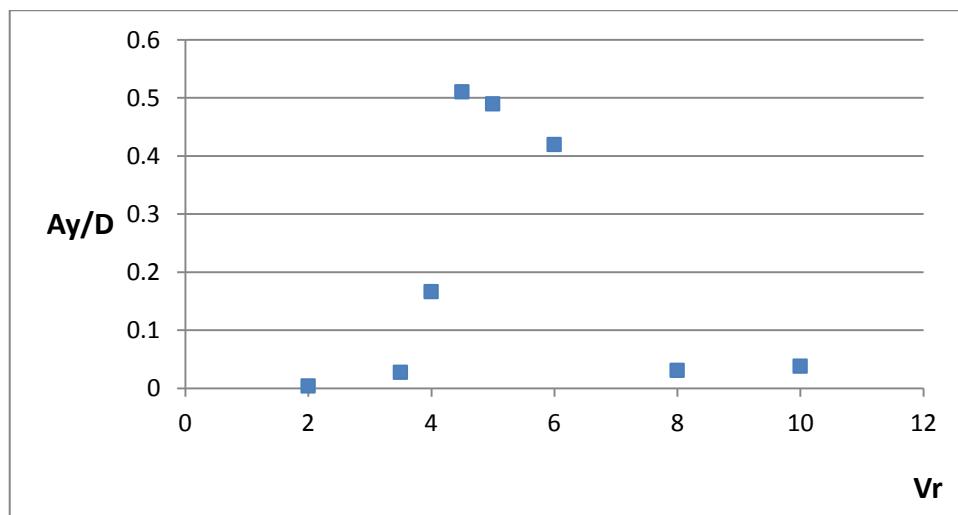


Gráfico 9 – Coeficiente de Arrasto Vs Velocidade Reduzida (3d)

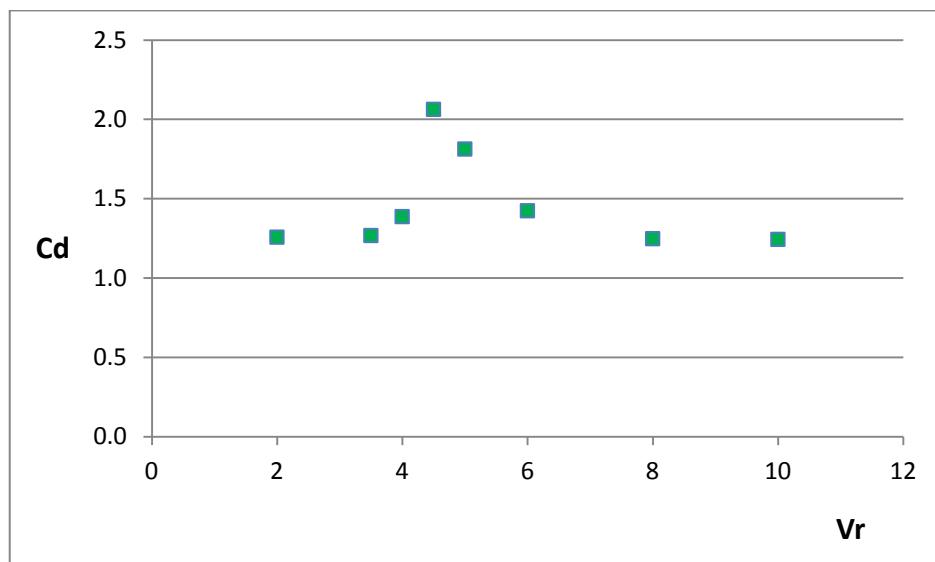
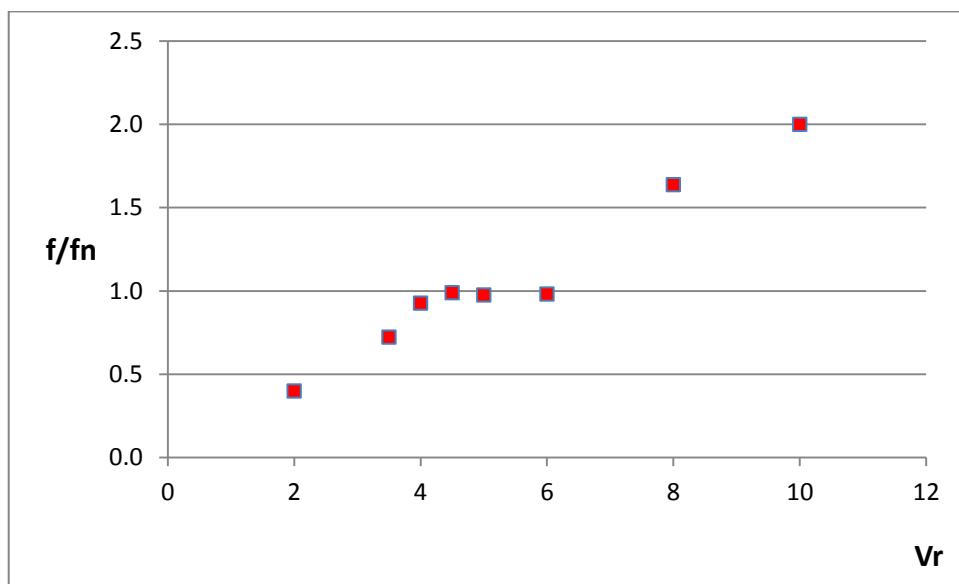


Gráfico 10 – Frequência Vs Velocidade Reduzida (3d)



A seguir são ilustradas figuras representando os campos de vorticidade em alguns casos simulados.

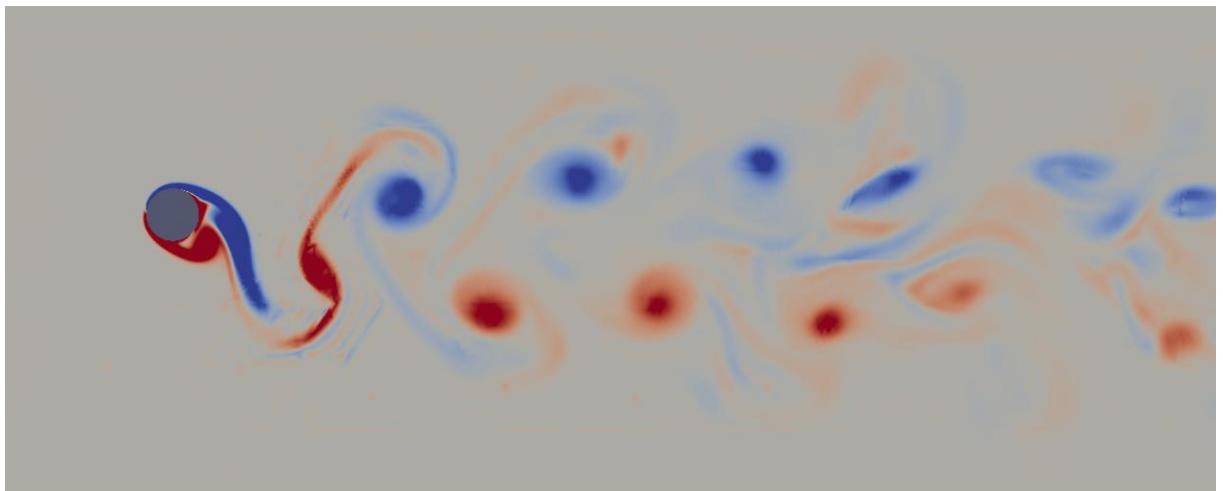


Figura 14 - Campo de vorticidade (eixo z) com $V_r = 4,5$ – 3d – Vista frontal

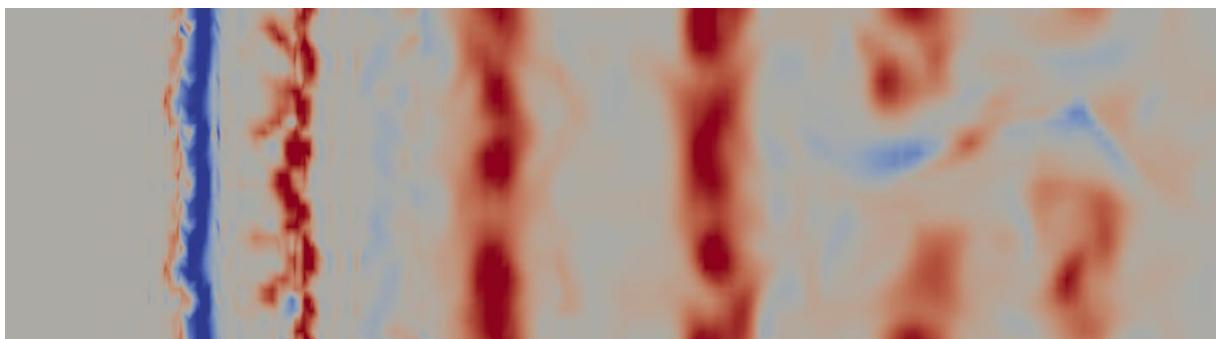


Figura 15 - Campo de vorticidade (eixo z) com $V_r = 4,5$ – 3d – Vista superior

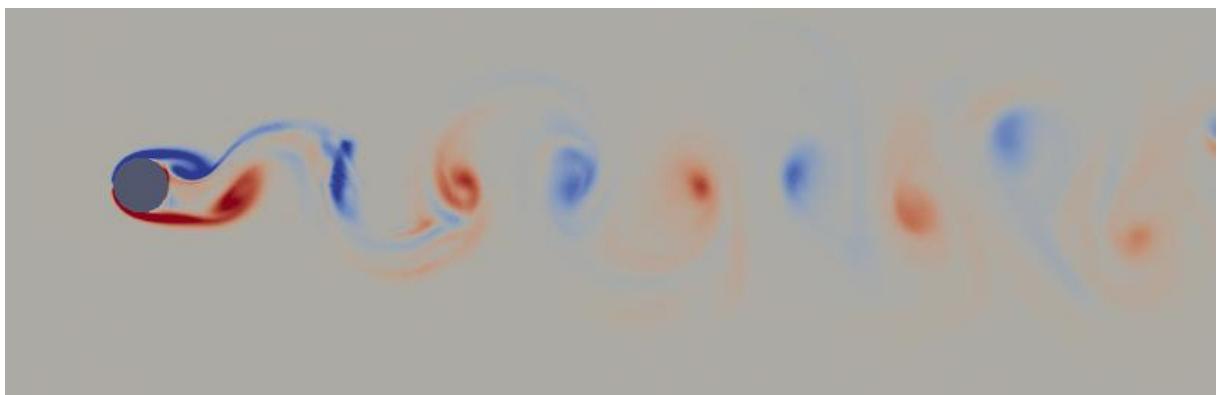


Figura 16 - Campo de vorticidade (eixo z) com $V_r = 2,0$ – 3d – Vista frontal

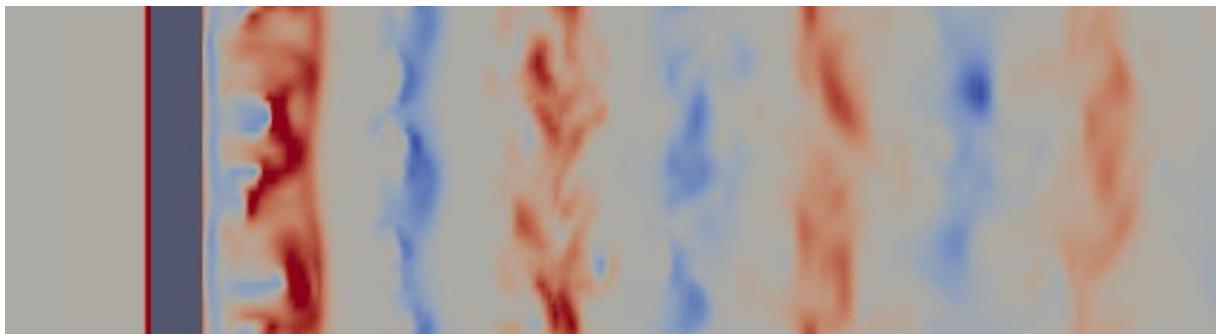


Figura 17 - Campo de vorticidade (eixo z) com $V_r = 2,0$ – 3d – Vista superior



Figura 18 - Campo de vorticidade (eixo z) com $V_r = 8,0$ – 3d – Vista frontal

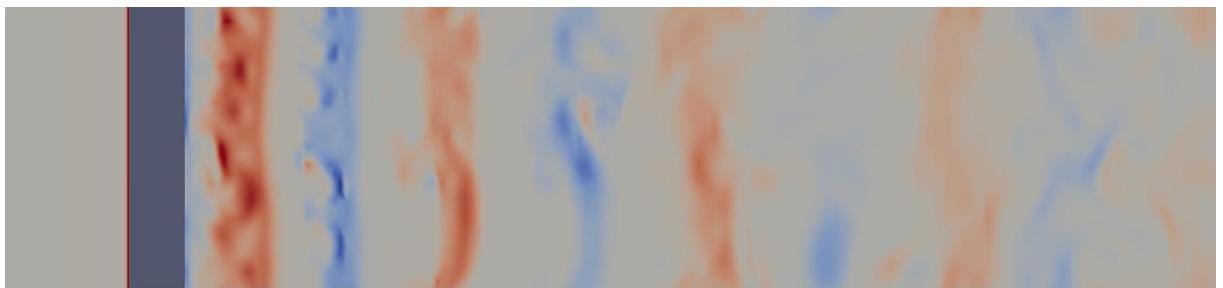


Figura 19 - Campo de vorticidade (eixo z) com $V_r = 8,0$ – 3d – Vista superior

Nas figuras anteriores (Figs. 14 a 19) pode-se visualizar claramente a formação da esteira de vórtices e, especificamente, na Fig. 14 ocorre a sua maior intensidade, devido à frequência de emissão estar muito próxima da frequência natural da estrutura ($V_r = 4,5$). Além disso, as Figs. 15, 17 e 19 ilustram claramente o caráter tridimensional destas simulações através de sua vista superior.

A seguir são apresentados três gráficos referentes ao deslocamento e força de sustentação para a velocidade reduzida de *lock-in* ($V_r = 4,5$).

Gráfico 11 – Deslocamento (y) e Força de sustentação (Fy) Vs Tempo – $V_r = 4,5$ – 3d

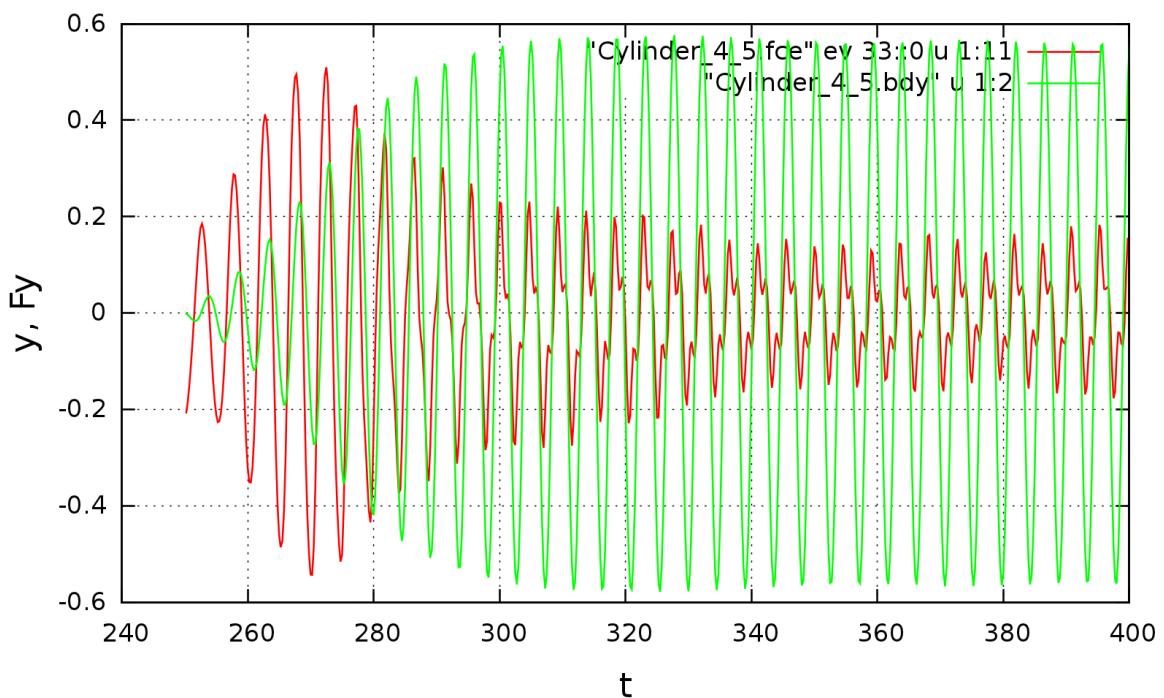


Gráfico 12 – Deslocamento (y) e Força de sustentação (Fy) Vs Tempo – $V_r = 4,5$ – 3d (zoom)

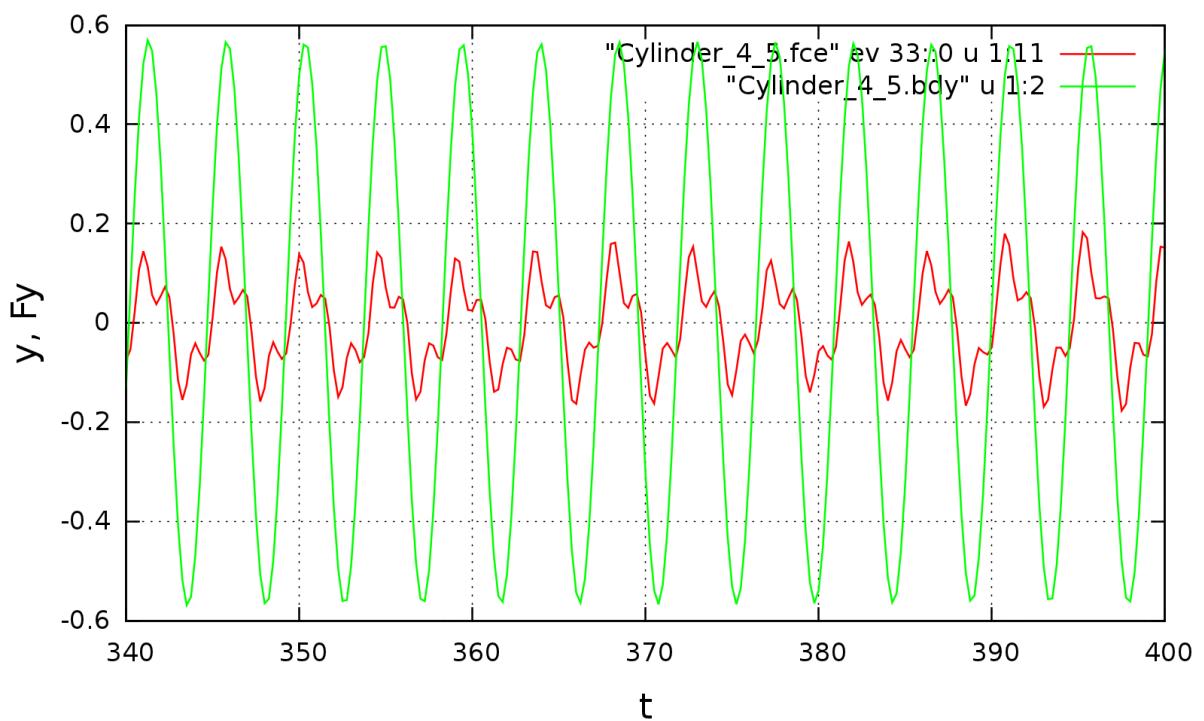
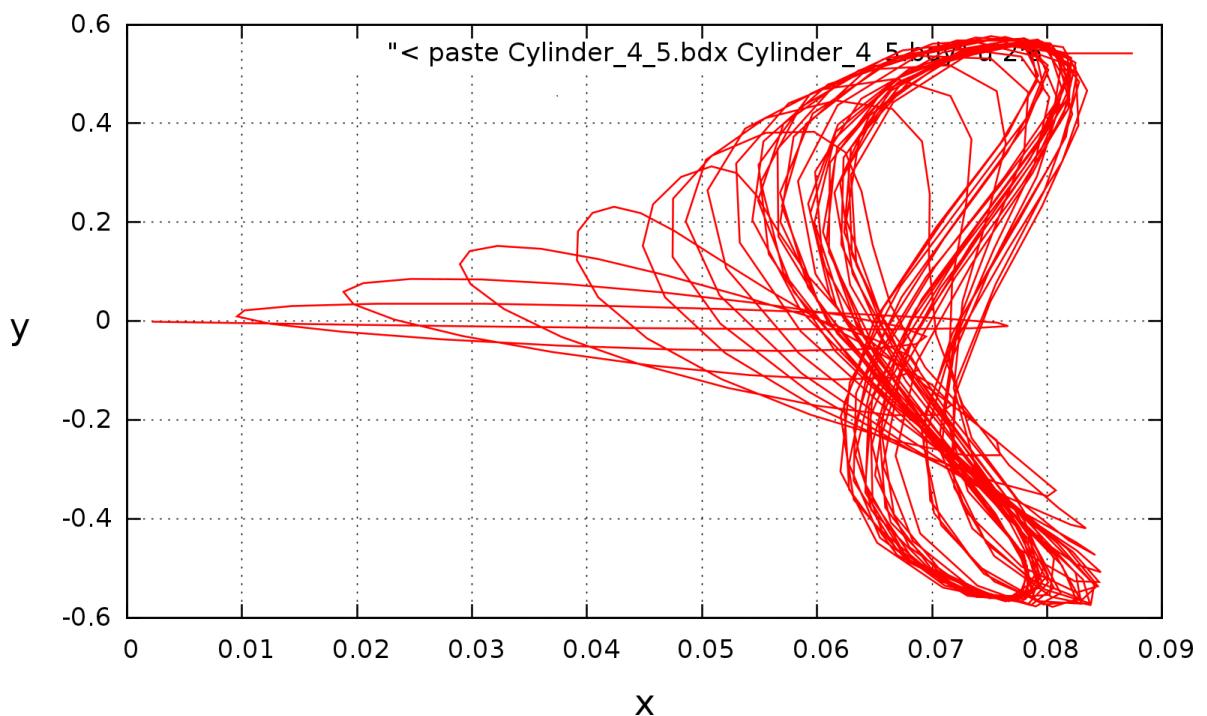


Gráfico 13 – Deslocamento (y) Vs Deslocamento (x) – Vr = 4,5 – 3d



Os gráficos 11 e 12 mostram a relação entre o deslocamento transversal do cilindro e a força de sustentação presente em relação ao tempo. Nota-se no gráfico 12 que o deslocamento e a força de sustentação estão em fase quando a emissão de vórtices atinge um regime estável.

No gráfico 13 tem-se uma curva característica desse tipo de movimento, a qual é resultado de um movimento harmônico (Curva de Lissajous).

7. Conclusões

Tendo como base os resultados obtidos nas simulações, pode-se concluir que o Método de Elementos Espectrais aliado ao desenvolvimento da abordagem feita para corpos rígidos constituem uma boa alternativa para analisar casos de escoamento ao redor de cilindros com números de Reynolds relativamente baixos, pois os resultados fornecidos pelas simulações se mostraram coerentes com o desenvolvimento teórico e com o esperado experimentalmente. Além disso, o fenômeno de sincronização (*lock-in*), o qual possui fundamental importância nesse tipo de análise, é identificado claramente nos gráficos das simulações numéricas.

Outro fato importante a ser comentado é que a diferença entre as simulações tridimensionais e as de dois graus de liberdade (sem considerar a profundidade na direção z) do cilindro rígido para baixos números de Reynolds é relativamente pequena no que se refere à forma dos gráficos obtidos, sendo que praticamente somente os valores máximos são diferentes. Com isso, pode-se concluir que o caso com 2 DOF pode ser tomado como uma boa aproximação qualitativa do caso tridimensional para se evitar custos computacionais elevados gerados pelos parâmetros adicionais 3d.

Entretanto, algo que foi observado durante o desenvolvimento deste trabalho foi que as simulações se tornam significantemente custosas à medida que se aumenta o valor da velocidade reduzida. Portanto, este fato também deve ser levado em consideração ao se fazer outros tipos de análise os quais envolvem escoamentos com números de Reynolds mais altos.

8. Referências Bibliográficas

ÁSSI, G. R. S. *Estudo experimental do efeito de interferência no escoamento ao redor de cilindros alinhados.* Dissertação de mestrado apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2005. 250 p.

BEARMAN, P. W. *Vortex shedding from oscillating bluff bodies.* Annual Review of Fluid Mechanics, 16:195-222, 1984.

CARMO, B. S. *Estudo numérico do escoamento ao redor de cilindros alinhados.* Dissertação de mestrado apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2005. 133 p.

CARMO, B. S. *On wake interference in the flow around two circular cylinders: Direct Stability Analysis and Flow-Induced Vibrations.* Doctor of Philosophy. Department of Aeronautics. Imperial College of Science, Technology and Medicine. London, U.K., 2009.

CARMO, B. S., SHERWIN, S. J., BEARMAN, P. W., WILLDEN, R. H. J. *Flow-induced vibration of a circular cylinder subjected to wake interference at low Reynolds number.* Journal of Fluids and Structures. Vol. 27. Issue 4. May 2011.

CHAPARIS, F. *Vortex-Induced Motions of Marine Risers: Straked Force Database Extraction & Transient Response Analysis.* Master of Science in Naval Architecture and Marine Engineering. Department of Mechanical Engineering. Massachusetts Institute of Technology. Cambridge, Massachusetts, U. S., 2009.

DAHL, J. M. *Vortex-Induced Vibration of a Circular Cylinder with Combined In-line and Cross-flow Motion.* Doctor of Philosophy. Center for Ocean Engineering. Department of Mechanical Engineering. Massachusetts Institute of Technology. Cambridge, Massachusetts, U. S., 2008.

KHALAK, A., WILLIAMSON, C. H. K. *Dynamics of a hydroelastic cylinder with very low mass and damping*. Journal of Fluids and Structures, 10:455-472, 1996.

KHALAK, A., WILLIAMSON, C. H. K. *Motions, force and mode transitions in vortex-induced vibrations at low mass damping*. Journal of Fluids and Structures, 13:813-851, 1999.

LI, L., SHERWIN S. J., BEARMAN, P. W. *A moving frame of reference algorithm for fluid/structure interaction of rotating and translating bodies*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 00:1-6, 2000.

MUKUNDAN, H. *Vortex-Induced Vibration of Marine Risers: Motion and Force reconstruction from Field and Experimental Data*. Doctor of Philosophy. Department of Mechanical Engineering. Massachusetts Institute of Technology. Cambridge, Massachusetts, U. S., 2008.

SARPKAYA, T. *Transverse oscillations of a circular cylinder in uniform flow*. Technical Report NPS-69SL77071, Naval Postgraduate School, Mechanical Engineering, Monterey, California, 1977.

WHITE, F. M. *Fluid Mechanics*. 4th Ed. McGraw Hill. United States, 1998.